

COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

(affiliée à l'Organisation Internationale de Normalisation — ISO)

NORME DE LA CEI

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

(affiliated to the International Organization for Standardization — ISO)

IEC STANDARD

Publication 397 A

1975

Premier complément à la Publication 397 (1972)

**Méthodes d'essai des fours à chargement discontinu
à résistances chauffantes métalliques**

Paragraphe 5.14: Détermination de la chaleur accumulée

First supplement to Publication 397 (1972)

Test methods for batch furnaces with metallic heating resistors

Sub-Clause 5.14: Determination of accumulated heat



Droits de reproduction réservés — Copyright - all rights reserved

Bureau Central de la Commission Electrotechnique Internationale

1, rue de Varembé
Genève, Suisse

Révision de la présente publication

Le contenu technique des publications de la CEI est constamment revu par la Commission afin d'assurer qu'il reflète bien l'état actuel de la technique.

Les renseignements relatifs à ce travail de révision, à l'établissement des éditions révisées et aux mises à jour peuvent être obtenus auprès des Comités nationaux de la CEI et en consultant les documents ci-dessous:

- **Bulletin de la CEI**
- **Rapport d'activité de la CEI**
Publié annuellement
- **Catalogue des publications de la CEI**
Publié annuellement

Terminologie utilisée dans la présente publication

Seuls sont définis ici les termes spéciaux se rapportant à la présente publication.

En ce qui concerne la terminologie générale, le lecteur se reportera à la Publication 50 de la CEI: Vocabulaire Electrotechnique International (V.E.I.), qui est établie sous forme de chapitres séparés traitant chacun d'un sujet défini, l'Index général étant publié séparément. Des détails complets sur le V.E.I. peuvent être obtenus sur demande.

Symboles graphiques et littéraux

Seuls les symboles graphiques et littéraux spéciaux sont inclus dans la présente publication.

Le recueil complet des symboles graphiques approuvés par la CEI fait l'objet de la Publication 117 de la CEI.

Les symboles littéraux et autres signes approuvés par la CEI font l'objet de la Publication 27 de la CEI.

Autres publications de la CEI établies par le même Comité d'Etudes

L'attention du lecteur est attirée sur la page 3 de la couverture, qui énumère les autres publications de la CEI préparées par le Comité d'Etude qui a établi la présente publication.

Revision of this publication

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC, thus ensuring that the content reflects current technology.

Information on the work of revision, the issue of revised editions and amendment sheets may be obtained from IEC National Committees and from the following IEC sources:

- **IEC Bulletin**
- **Report on IEC Activities**
Published yearly
- **Catalogue of IEC Publications**
Published yearly

Terminology used in this publication

Only special terms required for the purpose of this publication are defined herein.

For general terminology, readers are referred to IEC Publication 50: International Electrotechnical Vocabulary (I.E.V.), which is issued in the form of separate chapters each dealing with a specific field, the General Index being published as a separate booklet. Full details of the I.E.V. will be supplied on request.

Graphical and letter symbols

Only special graphical and letter symbols are included in this publication.

The complete series of graphical symbols approved by the IEC is given in IEC Publication 117.

Letter symbols and other signs approved by the IEC are contained in IEC Publication 27.

Other IEC publications prepared by the same Technical Committee

The attention of readers is drawn to the inside of the back cover, which lists other IEC publications issued by the Technical Committee which has prepared the present publication.

COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

(affiliée à l'Organisation Internationale de Normalisation — ISO)

NORME DE LA CEI

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

(affiliated to the International Organization for Standardization — ISO)

IEC STANDARD

Publication 397 A

1975

Premier complément à la Publication 397 (1972)

**Méthodes d'essai des fours à chargement discontinu
à résistances chauffantes métalliques**

Paragraphe 5.14: Détermination de la chaleur accumulée

First supplement to Publication 397 (1972)

Test methods for batch furnaces with metallic heating resistors

Sub-Clause 5.14: Determination of accumulated heat



Droits de reproduction réservés — Copyright - all rights reserved

Aucune partie de cette publication ne peut être reproduite ni utilisée sous quelque forme que ce soit et par aucun procédé, électronique ou mécanique, y compris la photocopie et les microfilms, sans l'accord écrit de l'éditeur.

No part of this publication may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and microfilm, without permission in writing from the publisher.

Bureau Central de la Commission Electrotechnique Internationale

1, rue de Varembe

Genève, Suisse

COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

PREMIER COMPLÉMENT À LA PUBLICATION 397 (1972)

Méthodes d'essai des fours à chargement discontinu à résistances chauffantes métalliques

Paragraphe 5.14 : Détermination de la chaleur accumulée

PRÉAMBULE

- 1) Les décisions ou accords officiels de la CEI en ce qui concerne les questions techniques, préparés par des Comités d'Etudes où sont représentés tous les Comités nationaux s'intéressant à ces questions, expriment dans la plus grande mesure possible un accord international sur les sujets examinés.
- 2) Ces décisions constituent des recommandations internationales et sont agréées comme telles par les Comités nationaux.
- 3) Dans le but d'encourager l'unification internationale, la CEI exprime le vœu que tous les Comités nationaux adoptent dans leurs règles nationales le texte de la recommandation de la CEI, dans la mesure où les conditions nationales le permettent. Toute divergence entre la recommandation de la CEI et la règle nationale correspondante doit, dans la mesure du possible, être indiquée en termes clairs dans cette dernière.

PRÉFACE

La présente publication a été établie par le Comité d'Etudes N° 27 de la CEI: Chauffage électrique industriel, en collaboration avec l'Union internationale d'électrothermie.

Un premier projet fut discuté lors de la réunion tenue à Athènes en 1972. A la suite de cette réunion, le projet, document 27(Bureau Central)22, fut soumis à l'approbation des Comités nationaux suivant la Règle des Six Mois en août 1973.

Les pays suivants se sont prononcés explicitement en faveur de la publication:

Afrique du Sud (République d')

Allemagne

Belgique

Canada

Danemark

France

Hongrie

Israël

Italie

Japon

Pays-Bas

Pologne

Portugal

Roumanie

Royaume-Uni

Tchécoslovaquie

Turquie

Yougoslavie

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

FIRST SUPPLEMENT TO PUBLICATION 397 (1972)

Test methods for batch furnaces with metallic heating resistors

Sub-Clause 5.14: Determination of accumulated heat

FOREWORD

- 1) The formal decisions or agreements of the IEC on technical matters, prepared by Technical Committees on which all the National Committees having a special interest therein are represented, express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the subjects dealt with.
- 2) They have the form of recommendations for international use and they are accepted by the National Committees in that sense.
- 3) In order to promote international unification, the IEC expresses the wish that all National Committees should adopt the text of the IEC recommendation for their national rules in so far as national conditions will permit. Any divergence between the IEC recommendation and the corresponding national rules should, as far as possible, be clearly indicated in the latter.

PREFACE

This publication has been prepared by IEC Technical Committee No. 27, Industrial Electroheating Equipment, in co-operation with the International Union for Electroheat.

A first draft was discussed at the meeting held in Athens in 1972. As a result of this meeting, the draft, document 27(Central Office)22, was submitted to the National Committees for approval under the Six Months' Rule in August 1973.

The following countries voted explicitly in favour of publication:

Belgium
Canada
Czechoslovakia
Denmark
France
Germany
Hungary
Israel
Italy

Japan
Netherlands
Poland
Portugal
Romania
South Africa (Republic of)
Turkey
United Kingdom
Yugoslavia

PREMIER COMPLÉMENT À LA PUBLICATION 397 (1972)

Méthodes d'essai des fours à chargement discontinu à résistances chauffantes métalliques

Paragraphe 5.14 : Détermination de la chaleur accumulée

Page 20

5.14 Détermination de la chaleur accumulée

Remplacer la note par le texte suivant :

La chaleur accumulée d'un four en régime permanent peut être déterminée par des méthodes différentes. La présente norme décrit deux d'entre elles: l'une appelée méthode directe, l'autre appelée méthode indirecte. La méthode directe est la méthode de base. La méthode indirecte, appelée également méthode Beuken, convient particulièrement aux mesures industrielles en raison de sa simplicité. La méthode utilisée doit être indiquée à côté du résultat.

A. Méthode directe (méthode classique)

La chaleur accumulée E_{ac} d'un four est déterminée en calculant la différence entre l'énergie calorifique E_a fournie au cours de l'échauffement du four, du régime froid jusqu'au régime permanent, et l'énergie E_o cédée par le four au milieu ambiant pendant sa mise en température.

A condition d'avoir une proportionnalité directe entre l'augmentation de la température à la surface extérieure du four et la perte de chaleur de cette surface, E_o peut être calculée au moyen de la formule suivante:

$$E_o = \frac{P_o}{\theta_{s,n} - \theta_a} \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\theta_{s,(k-1)} - \theta_{s,k}}{2} - \theta_a \right] \Delta t_k \quad (1)$$

où:

P_o = pertes à vide (W) en régime permanent

$\theta_{s,n}$ = température superficielle du four (°C) en régime permanent

θ_a = température ambiante (°C)

$\theta_{s,k}$ = température superficielle du four (°C), après intervalle Δt_k mesuré conformément au paragraphe 5.4 de la Publication 397 de la C.E.I.

Δt_k = intervalle de temps (h) entre deux mesures successives.

La chaleur accumulée est donc:

$$E_{ac} = E_a - E_o \text{ (Wh)}$$

B. Méthode indirecte (méthode Beuken)

Lors du refroidissement du four, d'un régime permanent donné jusqu'à la température ambiante, la variation de la température à l'intérieur du four est donnée par la somme de plusieurs termes exponentiels avec:

θ_i = température (°C) à l'intérieur du four

θ_k = température (°C) déterminée suivant la figure 2, page 15*

τ_k = constante de temps (h) déterminée suivant la figure 2

on a:

$$\theta_i(t) - \theta_a = \sum_{k=1}^{k=n} \theta_k e^{-t/\tau_k} \quad (2)$$

* Les références des pages correspondent au présent complément.

FIRST SUPPLEMENT TO PUBLICATION 397 (1972)

Test methods for batch furnaces with metallic heating resistors

Sub-Clause 5.14 : Determination of accumulated heat

Page 21

5.14 Determination of accumulated heat

Replace the note by the following text:

The accumulated heat of a furnace in steady-state may be determined by different methods. This standard describes two such methods: one called the direct and the other the indirect method. The direct method is the basic method. The indirect method, also called the Beuken method, because of its simplicity, is particularly convenient for industrial measurements. The method applied should be stated with the result.

A. Direct method (classical method)

The accumulated heat E_{ac} of a furnace is determined by calculating the difference between the thermal energy E_a supplied during heating of the furnace from cold-state to steady-state and the energy E_o transmitted by the furnace to the ambient medium during its heating period.

On condition that there is a direct proportionality between temperature rise at the external surface of the furnace and the heat loss from this surface, E_o can be calculated from the following expression:

$$E_o = \frac{P_o}{\theta_{s,n} - \theta_a} \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\theta_{s,(k-1)} - \theta_{s,k}}{2} - \theta_a \right] \Delta t_k \quad (1)$$

where:

P_o = no-load losses (W) in steady-state

$\theta_{s,n}$ = superficial temperature of furnace (°C) in steady-state

θ_a = ambient temperature (°C)

$\theta_{s,k}$ = superficial temperature of furnace (°C), after the interval Δt_k , measured in accordance with Sub-clause 5.4 of IEC Publication 397

Δt_k = time interval (h) between two successive measurements.

The accumulated heat is hence:

$$E_{ac} = E_a - E_o \text{ (Wh)}$$

B. Indirect method (Beuken method)

When cooling a furnace from a given steady-state down to the ambient temperature, the temperature variation inside the furnace is expressed by the sum of several exponential terms where:

θ_i = temperature (°C) inside the furnace

θ_k = temperature (°C) determined according to Figure 2, page 15*

τ_k = time constant (h) determined from Figure 2

we obtain:

$$\theta_i(t) - \theta_a = \sum_{k=1}^{k=n} \theta_k e^{-t/\tau_k} \quad (2)$$

* References are to page numbers of the present supplement.

ce qui peut s'exprimer aussi:

$$\theta_i(t) - \theta_a = \theta_1 e^{-t/\tau_1} + \theta_2 e^{-t/\tau_2} + \dots + \theta_n e^{-t/\tau_n} \quad (3)$$

Quand un four peut être considéré comme un système thermique linéaire, la chaleur accumulée en régime permanent E_{ac} est donnée par (voir l'annexe A):

$$E_{ac} = P_o \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k = P_o (\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n) \quad (4)$$

où

P_o = pertes à vide en régime permanent, équivalant à un instant donné à la puissance de chauffe en régime permanent (W)

E_{ac} = chaleur accumulée en régime permanent (Wh)

$\tau_1 \dots \tau_n$ = constantes de temps (h)

L'équation (4) peut également s'écrire:

$$E_{ac} = P_o (\theta_{i,o} - \theta_a) \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\tau_k}{\theta_k} \quad (5)$$

avec $\theta_{i,o} = \theta_n$ = température du four avant la coupure du chauffage et θ_a = température ambiante.

En première approximation, si l'on tient compte uniquement du terme $k=1$ ayant la plus grande constante de temps, l'expression précédente peut être ramenée à:

$$E_{ac} = P_o (\theta_{i,o} - \theta_a) \tau_1 / \theta_1 \quad (6)$$

Les grandeurs $\theta_{i,o}$, θ_a et P_o sont déterminées par des mesures, alors que les grandeurs τ_1 et θ_1 sont déduites de la courbe de température établie lors du refroidissement (voir la figure 1, page 14) ou à l'aide d'un programme de calcul numérique adéquat à partir des mêmes températures relevées lors du refroidissement.

Exemple pratique

Le four est stabilisé à sa température normale d'utilisation et la puissance de chauffe moyenne pendant 1 h est mesurée (lecture sur un wattheuremètre divisée par le temps de mesure). Il faudrait vérifier que le régime thermique est vraiment établi. La différence entre deux mesures successives ne devra, autant que possible, pas dépasser 3%. L'alimentation est ensuite coupée et la température intérieure du four est enregistrée pendant le refroidissement. Cette température à l'intérieur du four est mesurée par rapport à la température ambiante qui est mesurée par un pyromètre-globe à une distance de 1 m du four (voir l'article 6 de la Publication 398 de la CEI: Conditions générales d'essai des installations électrothermiques).

Si la température intérieure du four est mesurée à l'aide de thermocouples, il suffit d'utiliser deux thermocouples identiques, c'est-à-dire raccordés en opposition. Le résultat $(\theta_i - \theta_a)$ est rapporté à la différence de température initiale $(\theta_o - \theta_a)$ et reporté sur un diagramme semi-logarithmique (voir les figures 2 et 3, pages 15 et 16).

La zone linéaire permet de calculer τ_1 et l'intersection avec l'axe des ordonnées donne $\theta_1/(\theta_{i,o} - \theta_a)$. L'écart entre la courbe de refroidissement relevée et l'extrapolation jusqu'à l'axe des ordonnées du dernier tronçon, qui est une droite, est reporté de nouveau en diagramme semi-logarithmique, ce qui permet de trouver τ_2 et $\theta_2/(\theta_{i,o} - \theta_a)$. La différence entre la courbe relevée et l'approximation améliorée est de nouveau portée en diagramme, ce qui permet donc de déterminer τ_3 et $\theta_3/(\theta_{i,o} - \theta_a)$, etc.

Les différents paramètres, ainsi déduits dans l'exemple donné, peuvent être résumés dans le tableau I pour deux températures initiales du même four.

this can also be expressed by:

$$\theta_i(t) - \theta_a = \theta_1 e^{-t/\tau_1} + \theta_2 e^{-t/\tau_2} + \dots \theta_n e^{-t/\tau_n} \quad (3)$$

When the furnace can be considered as a linear thermal system, the accumulated heat in steady-state E_{ac} is given by (see Appendix A):

$$E_{ac} = P_o \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k = P_o (\tau_1 + \tau_2 + \dots \tau_n) \quad (4)$$

where:

P_o = no-load losses in steady-state, equivalent at a given moment to the heating power in steady-state (W)

E_{ac} = accumulated heat in steady-state (Wh)

$\tau_1 \dots \tau_n$ = time constants (h)

Equation (4) may be rewritten in the form:

$$E_{ac} = P_o (\theta_{i,o} - \theta_a) \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \tau_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \theta_k} \quad (5)$$

where $\theta_{i,o} = \theta_n$ = furnace temperature before heating was interrupted and θ_a = ambient temperature.

As a first approximation, if account is only taken of term $k=1$ having the highest time constant, the above expression can be reduced to:

$$E_{ac} = P_o (\theta_{i,o} - \theta_a) \tau_1 / \theta_1 \quad (6)$$

The quantities $\theta_{i,o}$, θ_a and P_o are determined from measurements, while quantities τ_1 and θ_1 are derived from the temperature curve established during cooling (see Figure 1, page 14) or by means of an adequate computer programme based on the same temperatures recorded during cooling.

Practical example

The furnace is brought to steady-state at its normal utilization temperature and the average heating power during 1 h is measured (read off on a watt-hour meter divided by the measuring time). It should be checked whether the thermal steady-state has been really reached. The difference between two successive measurements should, if possible, not exceed 3%. The supply is then cut off and the temperature inside the furnace is recorded during cooling. The temperature inside the furnace is measured in reference to the ambient temperature which is measured by means of a globe pyrometer at a distance of 1 m from the furnace (see Clause 6 of IEC Publication 398, General Test Conditions for Electro-heating Appliances).

If the temperature inside the furnace is measured by means of thermocouples, it suffices to use two identical thermocouples connected in opposition. The result $(\theta_i - \theta_a)$ is referred to the initial temperature difference $(\theta_o - \theta_a)$ and plotted on a semi-logarithmic diagram (see Figures 2 and 3, pages 15 and 16).

The linear zone allows for calculating τ_1 and the intersection with the axis of ordinates gives $\theta_1/(\theta_{i,o} - \theta_a)$. The deviation between the recorded cooling curve and the extrapolation up to the axis of ordinates of the last section being a straight line, is next plotted on a semi-logarithmic diagram, enabling τ_2 and $\theta_2/(\theta_{i,o} - \theta_a)$ to be determined. The difference between the recorded curve and the improved approximation is again plotted on a diagram, therefore enabling τ_3 and $\theta_3/(\theta_{i,o} - \theta_a)$, etc., to be found.

Different parameters, derived in this way in the example given, may be listed in Table I for two initial temperatures of the same furnace.

TABLEAU I

	Symboles	Unités	Valeur	Valeur
Température initiale	$\theta_{i,o}$	°C	602 *	1 024 *
Température finale = température ambiante	$\theta_{\infty} = \theta_a$	°C	24	24
Différence de température	$\Delta\theta = \theta_{i,o} - \theta_a$	K	578	1 000
Puissance de chauffe (initiale-finale)	ΔP	kW	1,497	3,00
Résistance thermique stationnaire	$R = \frac{\Delta\theta}{\Delta P}$	K/kW	386	333
Constantes de temps	τ_1	h	18,15	19,9
	τ_2	h	2,85	2,8
	τ_3	h	0,45	0,3
Amplitudes relatives	$\theta_1 / (\theta_{i,o} - \theta_a)$	%	83,5	81,5
	$\theta_2 / (\theta_{i,o} - \theta_a)$	%	8,6	13,0
	$\theta_3 / (\theta_{i,o} - \theta_a)$	%	7,9	5,5
Chaleur accumulée en régime permanent	E_{ac}	kWh	32,1	69
Chaleur accumulée (formule approchée) déterminée par la méthode indirecte	E_{ac}	kWh	32,5	73,2
Chaleur accumulée déterminée d'après la méthode directe pendant l'échauffement	E_{ac}	kWh	40	69,4
Chaleur accumulée déterminée d'après la méthode directe pendant le refroidissement	E_{ac}	kWh	31,6	56
			à 33,3	

* La courbe de refroidissement partant d'une valeur de température intérieure du four de 602 °C est représentée à la figure 2, page 15, et celle à partir de 1 024 °C, à la figure 3, page 16.

TABLE I

	Symbols	Units	Value	Value
Initial temperature	$\theta_{i,o}$	°C	602 *	1 024 *
Final temperature = ambient temperature	$\theta_{\infty} = \theta_a$	°C	24	24
Temperature difference	$\Delta\theta = \theta_{i,o} - \theta_a$	K	578	1 000
Heating power (initial-final)	ΔP	kW	1.497	3.00
Stationary thermal resistance	$R = \frac{\Delta\theta}{\Delta P}$	K/kW	386	333
Time constants	τ_1	h	18.15	19.9
	τ_2	h	2.85	2.8
	τ_3	h	0.45	0.3
Relative amplitudes	$\theta_1 / (\theta_{i,o} - \theta_a)$	%	83.5	81.5
	$\theta_2 / (\theta_{i,o} - \theta_a)$	%	8.6	13.0
	$\theta_3 / (\theta_{i,o} - \theta_a)$	%	7.9	5.5
Accumulated heat in steady-state	E_{ac}	kWh	32.1	69
Accumulated heat (approximate formula) determined by the indirect method	E_{ac}	kWh	32.5	73.2
Accumulated heat determined according to the direct method during heating	E_{ac}	kWh	40	69.4
Accumulated heat determined according to the direct method during cooling	E_{ac}	kWh	31.6 to 33.3	56

* The cooling curve starting from a temperature inside the furnace of 602 °C is given in Figure 2, page 15, and that starting from 1024 °C, in Figure 3, page 16.

ANNEXE A

MODÈLE ÉLECTRIQUE ANALOGIQUE DE LA CHALEUR ACCUMULÉE

Lors du refroidissement, la température de la paroi du four en un point quelconque varie si la puissance de chauffe devient nulle, suivant l'expression :

$$\theta_i(t) - \theta_a = \sum_{k=1}^{k=n} \theta_k e^{-t/\tau_k} \quad (1)$$

Au contraire, lors de l'échauffement du four, alimenté par une puissance constante $P_i = P_o$, la température en un point quelconque de la paroi du four varie de la façon suivante :

$$\theta_i(t) - \theta_a = \sum_{k=1}^{k=n} \theta_k (1 - e^{-t/\tau_k}) \quad (2)$$

La relation entre la cause (puissance d'alimentation) et la conséquence (augmentation de la température), dans le cas de l'échauffement d'un four, est déterminée par la fonction de transfert du système (four) :

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n} \theta_k (1 - e^{-t/\tau_k})}{P_o} = \frac{\theta_i(t) - \theta_a}{P(t)} = F(t) \quad (3)$$

Un système thermique de ce genre peut être étudié à l'aide d'un circuit électrique analogique ayant une fonction de transfert $F(t)$ (voir la figure 4, page 17).

En tenant compte de l'analogie connue entre la température et la tension, et entre le flux de chaleur et le courant électrique, la fonction de transfert sera égale au rapport des fonctions tension et courant :

$$\frac{U(t)}{i(t)} = F(t) \quad (4)$$

On voit immédiatement qu'un réseau RC répondra aux exigences étant donné que, pour un tel réseau, les tensions et les courants varient dans le temps de façon exponentielle.

Une solution possible est représentée à la figure 4. Ce réseau est alimenté par une source de courant constant I_o et, après la fermeture de la boucle, on obtient pour la première maille :

$$I_o = i_1 + i_2 \quad (5)$$

et :

$$U_1 = \frac{1}{C_1} \int i_2 dt \quad \text{donc :} \quad i_2 = C_1 \frac{dU_1}{dt}$$

$$U_1 = R_1 i_1 \quad \text{donc :} \quad i_1 = \frac{U_1}{R_1}$$

et :

$$I_o R_1 = U_1 + R_1 C_1 \frac{dU_1}{dt} = U_1 + \tau_1 \frac{dU_1}{dt} \quad (6)$$

avec $\tau_1 = R_1 C_1$.

APPENDIX A

ANALOGOUS ELECTRIC MODEL OF ACCUMULATED HEAT

During cooling when the heating power becomes zero, the temperature of the furnace wall at any arbitrary point varies according to the expression:

$$\theta_i(t) - \theta_a = \sum_{k=1}^{k=n} \theta_k e^{-t/\tau_k} \quad (1)$$

On the contrary, during heating of the furnace supplied with a constant power $P_t = P_o$, the temperature of the furnace wall at any arbitrary point varies in the following manner:

$$\theta_i(t) - \theta_a = \sum_{k=1}^{k=n} \theta_k (1 - e^{-t/\tau_k}) \quad (2)$$

The relation between the cause (supply power) and the consequence (temperature rise), in the case of heating of a furnace, is determined by the transfer function of the system (furnace):

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n} \theta_k (1 - e^{-t/\tau_k})}{P_o} = \frac{\theta_i(t) - \theta_a}{P(t)} = F(t) \quad (3)$$

A thermal system of this kind can be studied by means of an analogous electric circuit having a transfer function $F(t)$ (see Figure 4, page 17).

Taking into account the known analogy between temperature and voltage and between the heat flux and electric current, the transfer function will equal the ratio of voltage and current functions:

$$\frac{U(t)}{i(t)} = F(t) \quad (4)$$

It is immediately apparent that an RC network will meet these requirements, as for such a network the variation of voltages and currents with time is exponential.

A possible solution is given in Figure 4. The circuit is supplied by a source of constant current I_o and, after the loop is closed, we obtain for the first link:

$$I_o = i_1 + i_2 \quad (5)$$

and:

$$U_1 = \frac{1}{C_1} \int i_2 dt \quad \text{hence:} \quad i_2 = C_1 \frac{dU_1}{dt}$$

$$U_1 = R_1 i_1 \quad \text{hence:} \quad i_1 = \frac{U_1}{R_1}$$

and:

$$I_o R_1 = U_1 + R_1 C_1 \frac{dU_1}{dt} = U_1 + \tau_1 \frac{dU_1}{dt} \quad (6)$$

when $\tau_1 = R_1 C_1$.

La solution de cette expression est:

$$U_1 = R_1 I_o (1 - e^{-t/\tau_1}) \quad (7)$$

Une solution identique est valable pour les autres nœuds RC, de sorte que l'expression de la tension totale U s'écrit de la façon suivante:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{k=n} R_k I_o (1 - e^{-t/\tau_k}) \quad (8)$$

avec:

$$F(t) = \frac{U(t)}{I_o} = \frac{U(t)}{i(t)} \sum_{k=1}^{k=n} R_k (1 - e^{-t/\tau_k}) \quad (9)$$

En comparant la formule (9) avec la formule (3), on peut immédiatement conclure que le réseau représenté à la figure 4 peut être considéré comme étant analogue à la paroi du four.

Les grandeurs analogues sont les suivantes:

Four	Modèle électrique
$\theta_f(t)$	$U(t)$
$P(t) = P_o$	$i(t) = I_o$
$\frac{\theta_i}{P_o}$	R_i

D'autre part, l'analogie de la chaleur accumulée dans les parois au cours de l'échauffement du four jusqu'à sa température de régime correspond à la charge totale des condensateurs du circuit électrique analogue alimenté par une source de courant I_o , en régime permanent.

Cette dernière grandeur peut être aisément calculée. En effet:

$$\sum_{k=1}^{k=n} E_{kc} = \sum_{k=1}^{k=n} C_k U_k = \sum_{k=1}^{k=n} C_k R_k I_o \quad (10)$$

ou:

$$\sum_{k=1}^{k=n} E_{kc} = I_o \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k \quad (11)$$

L'expression de la chaleur accumulée dans le four vaut donc, par analogie:

$$E_{ac} = P_o \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k \quad (12)$$

Cette analogie obtenue en considérant la période d'échauffement du four, en partant de la température ambiante, est également valable lorsqu'on considère la période de refroidissement, avec la différence, due à l'analogie électrique, que cette période doit être considérée à partir de l'ouverture de la boucle.

The solution of this equation is:

$$U_1 = R_1 I_o (1 - e^{-t/\tau_1}) \quad (7)$$

An identical solution is valid for other RC, nodes. Thus, the expression for the total voltage U will read:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{k=n} R_k I_o (1 - e^{-t/\tau_k}) \quad (8)$$

with:

$$F(t) = \frac{U(t)}{I_o} = \frac{U(t)}{i(t)} \sum_{k=1}^{k=n} R_k (1 - e^{-t/\tau_k}) \quad (9)$$

Comparing formula (9) with formula (3) it may be concluded immediately that the network given in Figure 4 can be considered as analogous to the furnace wall.

The analogous values are the following:

Furnace	Electric model
$\theta_f(t)$	$U(t)$
$P(t) = P_o$	$i(t) = I_o$
$\frac{\theta_i}{P_o}$	R_i

On the other hand, the analogy of the heat accumulated in furnace walls during its heating to its steady-state temperature corresponds to the total charge of capacitors of the analogous electric circuit supplied by a source of current I_o , in steady state.

The latter quantity may easily be calculated. In fact:

$$\sum_{k=1}^{k=n} E_{kc} = \sum_{k=1}^{k=n} C_k U_k = \sum_{k=1}^{k=n} C_k R_k I_o \quad (10)$$

or

$$\sum_{k=1}^{k=n} E_{kc} = I_o \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k \quad (11)$$

Thus, the expression for the heat accumulated in the furnace equals, by analogy:

$$E_{ac} = P_o \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k \quad (12)$$

This analogy, obtained when considering the furnace heating period, starting from the ambient temperature, is also valid when considering the cooling period, with the difference due to the electrical analogy that this period must be considered from the loop opening.

