

# INTERNATIONAL STANDARD

## NORME INTERNATIONALE

**Electric power engineering – Modal components in three-phase a.c. systems –  
Quantities and transformations**

**Energie électrique – Composantes modales dans les systèmes a.c. triphasés –  
Grandeurs et transformations**

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 62428:2008



## THIS PUBLICATION IS COPYRIGHT PROTECTED

Copyright © 2008 IEC, Geneva, Switzerland

All rights reserved. Unless otherwise specified, no part of this publication may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and microfilm, without permission in writing from either IEC or IEC's member National Committee in the country of the requester.

If you have any questions about IEC copyright or have an enquiry about obtaining additional rights to this publication, please contact the address below or your local IEC member National Committee for further information.

Droits de reproduction réservés. Sauf indication contraire, aucune partie de cette publication ne peut être reproduite ni utilisée sous quelque forme que ce soit et par aucun procédé, électronique ou mécanique, y compris la photocopie et les microfilms, sans l'accord écrit de la CEI ou du Comité national de la CEI du pays du demandeur.

Si vous avez des questions sur le copyright de la CEI ou si vous désirez obtenir des droits supplémentaires sur cette publication, utilisez les coordonnées ci-après ou contactez le Comité national de la CEI de votre pays de résidence.

IEC Central Office  
3, rue de Varembe  
CH-1211 Geneva 20  
Switzerland  
Email: [inmail@iec.ch](mailto:inmail@iec.ch)  
Web: [www.iec.ch](http://www.iec.ch)

### About the IEC

The International Electrotechnical Commission (IEC) is the leading global organization that prepares and publishes International Standards for all electrical, electronic and related technologies.

### About IEC publications

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC. Please make sure that you have the latest edition, a corrigenda or an amendment might have been published.

- Catalogue of IEC publications: [www.iec.ch/searchpub](http://www.iec.ch/searchpub)

The IEC on-line Catalogue enables you to search by a variety of criteria (reference number, text, technical committee,...). It also gives information on projects, withdrawn and replaced publications.

- IEC Just Published: [www.iec.ch/online\\_news/justpub](http://www.iec.ch/online_news/justpub)

Stay up to date on all new IEC publications. Just Published details twice a month all new publications released. Available on-line and also by email.

- Electropedia: [www.electropedia.org](http://www.electropedia.org)

The world's leading online dictionary of electronic and electrical terms containing more than 20 000 terms and definitions in English and French, with equivalent terms in additional languages. Also known as the International Electrotechnical Vocabulary online.

- Customer Service Centre: [www.iec.ch/webstore/custserv](http://www.iec.ch/webstore/custserv)

If you wish to give us your feedback on this publication or need further assistance, please visit the Customer Service Centre FAQ or contact us:

Email: [csc@iec.ch](mailto:csc@iec.ch)  
Tel.: +41 22 919 02 11  
Fax: +41 22 919 03 00

### A propos de la CEI

La Commission Electrotechnique Internationale (CEI) est la première organisation mondiale qui élabore et publie des normes internationales pour tout ce qui a trait à l'électricité, à l'électronique et aux technologies apparentées.

### A propos des publications CEI

Le contenu technique des publications de la CEI est constamment revu. Veuillez vous assurer que vous possédez l'édition la plus récente, un corrigendum ou amendement peut avoir été publié.

- Catalogue des publications de la CEI: [www.iec.ch/searchpub/cur\\_fut-f.htm](http://www.iec.ch/searchpub/cur_fut-f.htm)

Le Catalogue en-ligne de la CEI vous permet d'effectuer des recherches en utilisant différents critères (numéro de référence, texte, comité d'études,...). Il donne aussi des informations sur les projets et les publications retirées ou remplacées.

- Just Published CEI: [www.iec.ch/online\\_news/justpub](http://www.iec.ch/online_news/justpub)

Restez informé sur les nouvelles publications de la CEI. Just Published détaille deux fois par mois les nouvelles publications parues. Disponible en-ligne et aussi par email.

- Electropedia: [www.electropedia.org](http://www.electropedia.org)

Le premier dictionnaire en ligne au monde de termes électroniques et électriques. Il contient plus de 20 000 termes et définitions en anglais et en français, ainsi que les termes équivalents dans les langues additionnelles. Egalement appelé Vocabulaire Electrotechnique International en ligne.

- Service Clients: [www.iec.ch/webstore/custserv/custserv\\_entry-f.htm](http://www.iec.ch/webstore/custserv/custserv_entry-f.htm)

Si vous désirez nous donner des commentaires sur cette publication ou si vous avez des questions, visitez le FAQ du Service clients ou contactez-nous:

Email: [csc@iec.ch](mailto:csc@iec.ch)  
Tél.: +41 22 919 02 11  
Fax: +41 22 919 03 00



IEC 62428

Edition 1.0 2008-07

# INTERNATIONAL STANDARD

## NORME INTERNATIONALE

**Electric power engineering – Modal components in three-phase a.c. systems –  
Quantities and transformations**

**Energie électrique – Composantes modales dans les systèmes a.c. triphasés –  
Grandeurs et transformations**

INTERNATIONAL  
ELECTROTECHNICAL  
COMMISSION

COMMISSION  
ELECTROTECHNIQUE  
INTERNATIONALE

PRICE CODE  
CODE PRIX

S

ICS 01.060; 29.020

ISBN 2-8318-9921-4

## CONTENTS

|                                                                                                                                                                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FOREWORD.....                                                                                                                                                                                                                                          | 3  |
| 1 Scope.....                                                                                                                                                                                                                                           | 5  |
| 2 Normative references .....                                                                                                                                                                                                                           | 5  |
| 3 Terms, definitions, quantities and concepts .....                                                                                                                                                                                                    | 5  |
| 3.1 General.....                                                                                                                                                                                                                                       | 5  |
| 3.2 Terms and definitions .....                                                                                                                                                                                                                        | 5  |
| 4 Modal transformation.....                                                                                                                                                                                                                            | 7  |
| 4.1 General.....                                                                                                                                                                                                                                       | 7  |
| 4.2 Power in modal components.....                                                                                                                                                                                                                     | 8  |
| 4.3 Established transformations .....                                                                                                                                                                                                                  | 10 |
| 5 Decoupling in three-phase a.c. systems .....                                                                                                                                                                                                         | 16 |
| 5.1 Decoupling in case of steady-state operation with sinusoidal quantities.....                                                                                                                                                                       | 16 |
| 5.2 Decoupling under transient conditions .....                                                                                                                                                                                                        | 19 |
| Bibliography.....                                                                                                                                                                                                                                      | 23 |
| Figure 1 – Circuit, fed by a three-phase voltage source with $\underline{U}_{L1Q}$ , $\underline{U}_{L2Q}$ , $\underline{U}_{L3Q}$ at the connection point Q and earthed at the neutral point N via the impedance $\underline{Z}_N = R_N + jX_N$ ..... | 16 |
| Figure 2 – Three decoupled systems which replace the coupled three-phase a.c. system of Figure 1 under the described conditions (see text).....                                                                                                        | 19 |
| Table 1 – Power-variant form of modal components and transformation matrices.....                                                                                                                                                                      | 11 |
| Table 2 – Power-invariant form of modal components and transformation matrices.....                                                                                                                                                                    | 12 |
| Table 3 – Clark, Park and space phasor components – modal transformations in the power-variant form.....                                                                                                                                               | 13 |
| Table 4 – Clark, Park and space phasor components – Modal transformations in the power-invariant form .....                                                                                                                                            | 14 |
| Table 5 – Transformation matrices in the power-variant form for phasor quantities .....                                                                                                                                                                | 15 |
| Table 6 – Transformation matrices in the power-invariant form for phasor quantities.....                                                                                                                                                               | 15 |
| Table 7 – Modal voltages and impedances in case of phasor quantities.....                                                                                                                                                                              | 18 |
| Table 8 – Modal voltages and inductances under transient conditions.....                                                                                                                                                                               | 22 |

## INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

**ELECTRIC POWER ENGINEERING –  
MODAL COMPONENTS IN THREE-PHASE AC SYSTEMS –  
QUANTITIES AND TRANSFORMATIONS**

## FOREWORD

- 1) The International Electrotechnical Commission (IEC) is a worldwide organization for standardization comprising all national electrotechnical committees (IEC National Committees). The object of IEC is to promote international co-operation on all questions concerning standardization in the electrical and electronic fields. To this end and in addition to other activities, IEC publishes International Standards, Technical Specifications, Technical Reports, Publicly Available Specifications (PAS) and Guides (hereafter referred to as "IEC Publication(s)"). Their preparation is entrusted to technical committees; any IEC National Committee interested in the subject dealt with may participate in this preparatory work. International, governmental and non-governmental organizations liaising with the IEC also participate in this preparation. IEC collaborates closely with the International Organization for Standardization (ISO) in accordance with conditions determined by agreement between the two organizations.
- 2) The formal decisions or agreements of IEC on technical matters express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the relevant subjects since each technical committee has representation from all interested IEC National Committees.
- 3) IEC Publications have the form of recommendations for international use and are accepted by IEC National Committees in that sense. While all reasonable efforts are made to ensure that the technical content of IEC Publications is accurate, IEC cannot be held responsible for the way in which they are used or for any misinterpretation by any end user.
- 4) In order to promote international uniformity, IEC National Committees undertake to apply IEC Publications transparently to the maximum extent possible in their national and regional publications. Any divergence between any IEC Publication and the corresponding national or regional publication shall be clearly indicated in the latter.
- 5) IEC provides no marking procedure to indicate its approval and cannot be rendered responsible for any equipment declared to be in conformity with an IEC Publication.
- 6) All users should ensure that they have the latest edition of this publication.
- 7) No liability shall attach to IEC or its directors, employees, servants or agents including individual experts and members of its technical committees and IEC National Committees for any personal injury, property damage or other damage of any nature whatsoever, whether direct or indirect, or for costs (including legal fees) and expenses arising out of the publication, use of, or reliance upon, this IEC Publication or any other IEC Publications.
- 8) Attention is drawn to the Normative references cited in this publication. Use of the referenced publications is indispensable for the correct application of this publication.
- 9) Attention is drawn to the possibility that some of the elements of this IEC Publication may be the subject of patent rights. IEC shall not be held responsible for identifying any or all such patent rights.

International Standard IEC 62428 has been prepared by IEC technical committee 25: Quantities and units.

The text of this standard is based on the following documents:

| FDIS        | Report on voting |
|-------------|------------------|
| 25/382/FDIS | 25/390/RVD       |

Full information on the voting for the approval of this standard can be found in the report on voting indicated in the above table.

This publication has been drafted in accordance with the ISO/IEC Directives, Part 2.

The committee has decided that the contents of this publication will remain unchanged until the maintenance result date indicated on the IEC web site under "<http://webstore.iec.ch>" in the data related to the specific publication. At this date, the publication will be

- reconfirmed;
- withdrawn;
- replaced by a revised edition; or
- amended.

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 62428:2008

# **ELECTRIC POWER ENGINEERING – MODAL COMPONENTS IN THREE-PHASE AC SYSTEMS – QUANTITIES AND TRANSFORMATIONS**

## **1 Scope**

This International Standard deals with transformations from original quantities into modal quantities for the widely used three-phase a.c. systems in the field of electric power engineering.

The examination of operating conditions and transient phenomena in three-phase a.c. systems becomes more difficult by the resistive, inductive or capacitive coupling between the phase elements and line conductors. Calculation and description of these phenomena in three-phase a.c. systems are easier if the quantities of the coupled phase elements and line conductors are transformed into modal quantities. The calculation becomes very easy if the transformation leads to decoupled modal systems. The original impedance and admittance matrices are transformed to modal impedance and admittance matrices. In the case of decoupling of the modal quantities, the modal impedance and admittance matrices become diagonal matrices.

## **2 Normative references**

The following referenced documents are indispensable for the application of this document. For dated references, only the edition cited applies. For undated references, the latest edition of the referenced document (including any amendments) applies.

IEC 60050-141, *International Electrotechnical Vocabulary (IEV) – Part 141: Polyphase systems and circuits*

## **3 Terms, definitions, quantities and concepts**

### **3.1 General**

Quantities in this standard are usually time-dependent. These quantities are for instance electric currents, voltages, linked fluxes, current linkages, electric and magnetic fluxes.

For quantities the general letter symbol  $g$  in case of real instantaneous values,  $\underline{g}$  in case of complex instantaneous values and  $\underline{\underline{G}}$  in case of phasors (complex r.m.s. values) are used.

NOTE Complex quantities in this standard are underlined. Conjugated complex quantities are indicated by an additional asterisk (\*). Matrices and column vectors are printed in bold face type, italic.

### **3.2 Terms and definitions**

For the purposes of this document, the terms and definitions given in IEC 60050-141 and the following apply.

#### **3.2.1**

##### **original quantities**

quantities  $g$  or  $\underline{\underline{G}}$  of a three-phase a.c. system

NOTE Subscripts 1, 2, 3 are generally used in this standard; additional letters may be put, for instance L1, L2, L3 as established in IEC 60909, IEC 60865 and IEC 61660.

### 3.2.2

#### modal components

quantities  $g_M$ ,  $\underline{g}_M$  or  $\underline{G}_M$  found by a transformation from the original quantities according to Clause 3

NOTE Additional subscripts 1, 2, 3 are used.

### 3.2.3

#### column vector of quantities

column matrix containing the three original quantities or modal components of a three-phase a.c. system

NOTE Column vectors are described by  $\underline{g}$  or  $\underline{g}_M$  and  $\underline{G}$  or  $\underline{G}_M$ , respectively.

### 3.2.4

#### modal transformation

matrix equation  $\underline{T} \underline{g}_M = \underline{g}$  for a column vector  $\underline{g}_M$  containing the three unknown modal quantities, where  $\underline{g}$  is a column vector containing the three given original quantities and  $\underline{T}$  is a  $3 \times 3$  transformation matrix

NOTE The transformation can be power-variant or power-invariant, see Tables 1 and 2.

### 3.2.5

#### inverse modal transformation

solution  $\underline{g}_M = \underline{T}^{-1} \underline{g}$  of the modal transformation that expresses a column vector  $\underline{g}_M$  containing the three modal quantities as a matrix product of the inverse transformation matrix  $\underline{T}^{-1}$  by a column vector  $\underline{g}$  containing the three original quantities

### 3.2.6

#### transformation into symmetrical components

##### Fortescue transformation

linear modal transformation with constant complex coefficients, the solution of which converts the three original phasors of a three-phase a.c. system into the reference phasors of three symmetric three-phase a.c. systems — the so-called symmetrical components — , the first system being a positive-sequence system, the second system being a negative-sequence system and the third system being a zero-sequence system

NOTE 1 The transformation into symmetrical components is used for example for the description of asymmetric steady-state conditions in three-phase a.c. systems.

NOTE 2 See Tables 1 and 2.

### 3.2.7

#### transformation into space phasor components

linear modal transformation with constant or angle-dependent coefficients, the solution of which replaces the instantaneous original quantities of a three-phase a.c. system by the complex space phasor in a rotating or a non-rotating frame of reference, its conjugate complex value and the real zero-sequence component

NOTE 1 The term “space vector” is also used for “space phasor”.

NOTE 2 The space phasor transformation is used for example for the description of transients in three-phase a.c. systems and machines.

NOTE 3 See Tables 1 and 2.

### 3.2.8

#### transformation into $\alpha\beta 0$ components

##### Clarke transformation

linear modal transformation with constant real coefficients, the solution of which replaces the instantaneous original quantities of a three-phase a.c. system by the real part and the

imaginary part of a complex space phasor in a non-rotating frame of reference and a real zero-sequence component or replaces the three original phasors of the three-phase a.c. system by two phasors ( $\alpha$  and  $\beta$  phasor) and a zero-sequence phasor

NOTE 1 The power-variant form of the space phasor is given by  $\underline{g}_s = g_\alpha + j g_\beta$  and the power-invariant form is given by  $\underline{g}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_\alpha + j g_\beta)$ .

NOTE 2 The  $\alpha\beta 0$  transformation is used for example for the description of asymmetric transients in three-phase a.c. systems.

NOTE 3 See tables 1 and 2.

### 3.2.9

#### transformation into dq0 components

##### Park transformation

linear modal transformation with coefficients sinusoidally depending on the angle of rotation, the solution of which replaces the instantaneous original quantities of a three-phase a.c. system by the real part and the imaginary part of a complex space phasor in a rotating frame of reference and a real zero-sequence component

NOTE 1 The power-variant form of the space phasor is given by  $\underline{g}_r = g_d + j g_q$  and the power-invariant form is given by  $\underline{g}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_d + j g_q)$ .

NOTE 2 The dq0 transformation is normally used for the description of transients in synchronous machines.

NOTE 3 See Tables 1 and 2.

## 4 Modal transformation

### 4.1 General

The original quantities  $g_1, g_2, g_3$  and the modal components  $\underline{g}_{M1}, \underline{g}_{M2}, \underline{g}_{M3}$  are related to each other by the following transformation equations:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{g}_{M1} \\ \underline{g}_{M2} \\ \underline{g}_{M3} \end{pmatrix} \quad (1)$$

or in a shortened form:

$$\underline{g} = \underline{T} \underline{g}_M \quad (2)$$

The coefficients  $t_{ik}$  of the transformation matrix  $\underline{T}$  can all be real or some of them can be complex. It is necessary that the transformation matrix  $\underline{T}$  is non-singular, so that the inverse relationship of Equation (2) is valid.

$$\underline{g}_M = \underline{T}^{-1} \underline{g} \quad (3)$$

If the original quantities are sinusoidal quantities of the same frequency, it is possible to express them as phasors and to write the transformation Equations (2) and (3) in an analogue form with constant coefficients:

$$\begin{pmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{t}_{11} & \underline{t}_{12} & \underline{t}_{13} \\ \underline{t}_{21} & \underline{t}_{22} & \underline{t}_{23} \\ \underline{t}_{31} & \underline{t}_{32} & \underline{t}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{G}_{M1} \\ \underline{G}_{M2} \\ \underline{G}_{M3} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{G} = \underline{T} \underline{G}_M \quad (5)$$

$$\underline{G}_M = \underline{T}^{-1} \underline{G} \quad (6)$$

#### 4.2 Power in modal components

Transformation relations are used either in the power-variant form as given in Table 1 or in the power-invariant form as given in Table 2.

For the power-invariant form of transformation, the power calculated with the three modal components is equal to the power calculated from the original quantities of a three-phase a.c. system with three line conductors and a neutral conductor, where  $u_1, u_2$  and  $u_3$  are the line-to-neutral voltages and  $i_1, i_2$  and  $i_3$  are the currents of the line conductors at a given location of the network. In a three-phase a.c. system with only three line conductors,  $u_1, u_2$  and  $u_3$  are the voltages between the line conductors and a virtual star point at a given location of the network.

The instantaneous power  $p$  expressed in terms of the original quantities is defined by:

$$p = u_1 i_1^* + u_2 i_2^* + u_3 i_3^* = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1^* \\ i_2^* \\ i_3^* \end{pmatrix} = \underline{u}^T \underline{i}^* \quad (7)$$

NOTE The asterisks denote formally the complex conjugate of the currents  $i_1, i_2, i_3$ . If these are real,  $i_1^*, i_2^*, i_3^*$  are identical to  $i_1, i_2, i_3$ .

If the relationship between the original quantities and the modal components given in Equation (2) is introduced for the voltages as well as for the currents:

$$\underline{u} = \underline{T} \underline{u}_M \text{ and } \underline{i} = \underline{T} \underline{i}_M \quad (8)$$

taking into account

$$\underline{u}^T = (\underline{T} \underline{u}_M)^T = \underline{u}_M^T \underline{T}^T, \quad (9)$$

the power  $p$  expressed in terms of modal components is found as:

$$p = \underline{u}_M^T \underline{T}^T \underline{T} \underline{i}_M^* \quad (10)$$

For the power-variant case where  $\underline{T}^T \underline{T}^*$  is not equal to the unity matrix an example is given at the end of this section. In case of

$$\underline{T}^T \underline{T}^* = \underline{E} \quad (11)$$

with the matrix  $E$  being the unity matrix of third order, Equation (10) changes to

$$P = \underline{u}_M^T \underline{I}_M^* = \begin{pmatrix} \underline{u}_{M1} & \underline{u}_{M2} & \underline{u}_{M3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{M1}^* \\ \underline{I}_{M2}^* \\ \underline{I}_{M3}^* \end{pmatrix} = \underline{u}_{M1} \underline{I}_{M1}^* + \underline{u}_{M2} \underline{I}_{M2}^* + \underline{u}_{M3} \underline{I}_{M3}^* \quad (12)$$

The condition  $\underline{T}^T \underline{T}^* = E$  or  $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^T$  means that the transformation matrix  $\underline{T}$  is a unitary matrix.

Because the Equations (7) and (12) have identical structure, the transformation relationship with a unitary matrix is called the power invariant form of transformation.

In connection with Table 2, the following examples can be given:

$$P_{\alpha\beta 0} = u_{\alpha} i_{\alpha} + u_{\beta} i_{\beta} + u_0 i_0$$

$$P_{dq0} = u_d i_d + u_q i_q + u_0 i_0$$

$$P_{ss^*0} = \underline{u}_s \underline{I}_s^* + \underline{u}_s^* \underline{I}_s + u_0 i_0 = 2\operatorname{Re}\{\underline{u}_s \underline{I}_s^*\} + u_0 i_0$$

$$P_{rr^*0} = \underline{u}_r \underline{I}_r^* + \underline{u}_r^* \underline{I}_r + u_0 i_0 = 2\operatorname{Re}\{\underline{u}_r \underline{I}_r^*\} + u_0 i_0$$

In case of three-phase systems of voltages and currents the complex power is given in original phasor quantities as follows:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 & \underline{U}_2 & \underline{U}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1^* \\ \underline{I}_2^* \\ \underline{I}_3^* \end{pmatrix} = \underline{U}^T \underline{I}^* \quad (13)$$

Substituting the modal components by

$$\underline{U}^T = (\underline{T} \underline{U}_M)^T = \underline{U}_M^T \underline{T}^T \quad \text{and} \quad \underline{I}^* = \underline{T}^* \underline{I}_M^*$$

the complex apparent power is found as:

$$\underline{S} = \underline{U}_M^T \underline{T}^T \underline{T}^* \underline{I}_M^* \quad (14)$$

In case of power invariance, the condition  $\underline{T}^T \underline{T}^* = E$  must also be valid. Then Equation (14) leads to the following power invariant expression:

$$\underline{S} = \underline{U}_M^T \underline{I}_M^* = \underline{U}_{M1} \underline{I}_{M1}^* + \underline{U}_{M2} \underline{I}_{M2}^* + \underline{U}_{M3} \underline{I}_{M3}^* = \begin{pmatrix} \underline{U}_{M1} & \underline{U}_{M2} & \underline{U}_{M3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{M1}^* \\ \underline{I}_{M2}^* \\ \underline{I}_{M3}^* \end{pmatrix} \quad (15)$$

The power-variant forms of transformation matrices are given in the Tables 3 and 5. They are also known as reference-component-invariant transformations, because, under balanced

symmetrical conditions, the reference component (the first component) of the modal components is equal to the reference component of the original quantities or its complex phasors, respectively. This is not the case for transformations in a rotating frame.

EXAMPLE According to Table 2 for the power-invariant form of the transformation matrix  $\underline{T}$  it follows:

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}^{T*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

showing that  $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^{T*}$  or  $\underline{T}^T \underline{T}^* = \underline{E}$ , fulfilling the condition for power invariance.

If the transformation matrix  $\underline{T}$  from Table 1 for the power-variant transformation is used, then the following results are found:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}^T = \begin{pmatrix} 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}^{T*} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{T}^{-1}$  from Table 1 is equal to  $\frac{1}{3} \underline{T}^{T*}$ , so that  $\underline{T}^T \underline{T}^* = 3 \cdot \underline{E}$ .

### 4.3 Established transformations

The most widely used transformation matrices  $\underline{T}$  and their inverse matrices  $\underline{T}^{-1}$  are given in the Tables 1 and 2, whereby Table 1 contains the power-variant (reference-component-invariant) form and Table 2 the power-invariant form of transformation matrices. The subscripts for the components are chosen to be equal in both cases of Tables 1 and 2, 3 and 4, 5 and 6.

The Tables 3 to 6 give the relations between the different types of modal components.

**Table 1 – Power-variant form of modal components and transformation matrices**

| Modal components                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Component:<br>First<br>Second<br>Third                           | Subscript:<br>M1<br>M2<br>M3 | $\underline{T}$<br>a                                                                                                                                                                                                              | $\underline{T}^{-1}$                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| symmetrical components<br>(Fortescue components)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | positive-sequence<br>negative-sequence<br>zero-sequence          | (1)<br>(2)<br>(0)<br>b       | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                           | $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                             |
| $\alpha\beta 0$ components,<br>non-rotating frame<br>(Clarke components)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | $\alpha$<br>$\beta$<br>zero-sequence                             | $\alpha$<br>$\beta$<br>0     | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                      | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                          |
| dq0 components,<br>rotating frame<br>(Park components)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | direct-axis<br>quadrature-axis<br>zero-sequence                  | d<br>q<br>0                  | $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 1 \\ c_2 & -s_2 & 1 \\ c_3 & -s_3 & 1 \end{pmatrix}$<br>c                                                                                                                                           | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$<br>c                                                                                                                               |
| space phasor components,<br>non-rotating frame                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | space phasor<br>conjugated complex space phasor<br>zero-sequence | s<br>s*<br>0                 | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                               |
| space phasor components,<br>rotating frame                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | space phasor<br>conjugated complex space phasor<br>zero-sequence | r<br>r*<br>0                 | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 2 \\ \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & 2 \\ \underline{a} e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} & 2 \end{pmatrix}$<br>c | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} \\ e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{j\vartheta} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$<br>c |
| <p><sup>a</sup> All the transformation matrices <math>\underline{T}</math> given here fulfil the following conditions:<br/> <math>\underline{t}_{11} + \underline{t}_{21} + \underline{t}_{31} = 0</math>, <math>\underline{t}_{12} + \underline{t}_{22} + \underline{t}_{32} = 0</math>, <math>\underline{t}_{13} = \underline{t}_{23} = \underline{t}_{33}</math>.</p> <p><sup>b</sup> The IEC Standards 60909, 60865 and 61660 have introduced the subscripts (1), (2), (0) for the power-variant form of the symmetrical components, to avoid confusion, if the subscripts 1, 2, 3 instead of L1, L2, L3 are used.</p> <p><sup>c</sup> <math>c_1 = \cos \vartheta</math>, <math>c_2 = \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3})</math>, <math>c_3 = \cos(\vartheta + \frac{2\pi}{3})</math>, <math>s_1 = \sin \vartheta</math>, <math>s_2 = \sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3})</math>,<br/> <math>s_3 = \sin(\vartheta + \frac{2\pi}{3})</math>, <math>\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}</math>, <math>\underline{a}^2 = \underline{a}^*</math>, <math>1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0</math>.</p> <p>In case of synchronous machines <math>\vartheta</math> is given by <math>\vartheta = \int \Omega(t) dt</math>, where <math>\Omega</math> is the instantaneous angle velocity of the rotor.</p> |                                                                  |                              |                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                 |

**Table 2 – Power-invariant form of modal components and transformation matrices**

| Modal components                                                         | Component:<br>First<br>Second<br>Third                           | Subscript:<br>M1<br>M2<br>M3 | $\underline{T}$<br>a                                                                                                                                                                                                                     | $\underline{T}^{-1}$                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| symmetrical components<br>(Fortescue components)                         | positive-sequence<br>negative-sequence<br>zero-sequence          | (1)<br>(2)<br>(0)<br>b       | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               |
| $\alpha\beta 0$ components,<br>non-rotating frame<br>(Clarke components) | $\alpha$<br>$\beta$<br>zero-sequence                             | $\alpha$<br>$\beta$<br>0     | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$                                       | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$                                       |
| dq0 components,<br>rotating frame<br>(Park components)                   | direct-axis<br>quadrature-axis<br>zero-sequence                  | d<br>q<br>0                  | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2 & -s_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_3 & -s_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$<br>c                                                                            | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$<br>c                                                                            |
| space phasor components,<br>non-rotating frame                           | space phasor<br>conjugated complex space phasor<br>zero-sequence | s<br>s*<br>0                 | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               |
| space phasor components,<br>rotating frame                               | space phasor<br>conjugated complex space phasor<br>zero-sequence | r<br>r*<br>0                 | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 2 \\ \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & 2 \\ \underline{a} e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} & 2 \end{pmatrix}$<br>c | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} \\ e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{j\vartheta} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$<br>c |

<sup>a</sup> All the transformation matrices  $\underline{T}$  given here fulfil the following conditions:  
 $\underline{t}_{11} + \underline{t}_{21} + \underline{t}_{31} = 0$ ,  $\underline{t}_{12} + \underline{t}_{22} + \underline{t}_{32} = 0$ ,  $\underline{t}_{13} = \underline{t}_{23} = \underline{t}_{33}$ .

<sup>b</sup> The IEC Standards 60909, 60865 and 61660 have introduced the subscripts (1), (2), (0) for the power-variant form of the symmetrical components, to avoid confusion, if the subscripts 1, 2, 3 instead of L1, L2, L3 are used.

<sup>c</sup>  $c_1 = \cos \vartheta$ ,  $c_2 = \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3})$ ,  $c_3 = \cos(\vartheta + \frac{2\pi}{3})$ ,  $s_1 = \sin \vartheta$ ,  $s_2 = \sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3})$ ,  $s_3 = \sin(\vartheta + \frac{2\pi}{3})$ ,  $\underline{a} = e^{j2\pi/3}$ ,  $\underline{a}^2 = \underline{a}^*$ ,  $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$ .

In case of synchronous machines  $\vartheta$  is given by  $\vartheta = \int \Omega(t) dt$ , where  $\Omega$  is the instantaneous angle velocity of the rotor.

Tables 3 and 4 contain the relations of the  $\alpha\beta 0$  components and the dq0 components with the space phasor components in the power-variant and the power-invariant form.

Table 3 – Clark, Park and space phasor components – modal transformations in the power-variant form

|                                                                                                                                                                                                                                             | $\bullet (g_1 \ g_2 \ g_3)^T$                                                                                                                                                                                                                             | $\bullet (g_\alpha \ g_\beta \ g_0)^T$                                                                                         | $\bullet (g_d \ g_q \ g_0)^T$                                                                                                  | $\bullet (\underline{g}_s \ \underline{g}_s^* \ \underline{g}_0)^T$                                                                        | $\bullet (\underline{g}_r \ \underline{g}_r^* \ \underline{g}_0)^T$                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} =$                                                                                                                                                                                         | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                       | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 1 \\ c_2 & -s_2 & 1 \\ c_3 & -s_3 & 1 \end{pmatrix}$                                             | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 2 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 2 \end{pmatrix}$        | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 2 \\ \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & 2 \\ \underline{a} e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} & 2 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{pmatrix} =$                                                                                                                                                                                | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                    | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                            | $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                   | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                                           | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 0 \\ -j e^{j\vartheta} & j e^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                   |
| $\begin{pmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{pmatrix} =$                                                                                                                                                                                         | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                                                              | $\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                   | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                            | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & e^{j\vartheta} & 0 \\ -j e^{-j\vartheta} & j e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                             |
| $\begin{pmatrix} \underline{g}_s \\ \underline{g}_s^* \\ \underline{g}_0 \end{pmatrix} =$                                                                                                                                                   | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ \underline{a} & 1 & \underline{a} \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               | $\begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                           | $\begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & j e^{j\vartheta} & 0 \\ e^{-j\vartheta} & -j e^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                        | $\begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                               |
| $\begin{pmatrix} \underline{g}_r \\ \underline{g}_r^* \\ \underline{g}_0 \end{pmatrix} =$                                                                                                                                                   | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & \underline{a} e^{-\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} \\ e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{j\vartheta} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & j e^{-j\vartheta} & 0 \\ e^{j\vartheta} & -j e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                           | $\begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                             | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                          |
| $c_1 = \cos \vartheta, \quad c_2 = \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3}), \quad c_3 = \cos(\vartheta + \frac{2\pi}{3}), \quad s_1 = \sin \vartheta, \quad s_2 = \sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3}), \quad s_3 = \sin(\vartheta + \frac{2\pi}{3}).$ |                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                |                                                                                                                                |                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                              |
| In case of synchronous machines $\vartheta$ is given by $\vartheta = \int \Omega(t) dt$ , where $\Omega$ is the instantaneous angle velocity of the rotor.                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                |                                                                                                                                |                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                              |

Table 4 – Clark, Park and space phasor components – Modal transformations in the power-invariant form

|                                                                                           | $\bullet (g_1 \ g_2 \ g_3)^T$                                                                                                                                                                                                       | $\bullet (g_\alpha \ g_\beta \ g_0)^T$                                                                                                                                                             | $\bullet (g_d \ g_q \ g_0)^T$                                                                                                                            | $\bullet (\underline{g}_s \ \underline{g}_s^* \ \underline{g}_0)^T$                                                                                    | $\bullet (\underline{g}_r \ \underline{g}_r^* \ \underline{g}_0)^T$                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} =$                                       | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                 | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2 & -s_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_3 & -s_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$             | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 1 \\ \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & 1 \\ \underline{a} e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{pmatrix} =$                              | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$                           | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                | $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                             | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                         | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 0 \\ -je^{j\vartheta} & je^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                                              |
| $\begin{pmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{pmatrix} =$                                       | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$                                                                            | $\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                       | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                      | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & e^{j\vartheta} & 0 \\ -je^{-j\vartheta} & je^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                                                                                                      |
| $\begin{pmatrix} \underline{g}_s \\ \underline{g}_s^* \\ \underline{g}_0 \end{pmatrix} =$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                          | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                                                                     | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & je^{j\vartheta} & 0 \\ e^{-j\vartheta} & -je^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                    | $\begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                      |
| $\begin{pmatrix} \underline{g}_r \\ \underline{g}_r^* \\ \underline{g}_0 \end{pmatrix} =$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} \\ e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{j\vartheta} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & je^{-j\vartheta} & 0 \\ e^{j\vartheta} & -je^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                             | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                           | $\begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                         | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                 |

$$c_1 = \cos \vartheta, \quad c_2 = \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3}), \quad c_3 = \cos(\vartheta + \frac{2\pi}{3}), \quad s_1 = \sin \vartheta, \quad s_2 = \sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3}), \quad s_3 = \sin(\vartheta + \frac{2\pi}{3}).$$

In case of synchronous machines  $\vartheta$  is given by  $\vartheta = \int \Omega(t) dt$ , where  $\Omega$  is the instantaneous angle velocity of the rotor.

Tables 5 and 6 contain the relations between modal components, if the original quantities are sinusoidal ones of the same frequency and can be written as r.m.s. phasors.

**Table 5 – Transformation matrices in the power-variant form for phasor quantities**

|                                                                                                     | $\bullet(\underline{G}_1 \ \underline{G}_2 \ \underline{G}_3)^T$                                                                                                       | $\bullet(\underline{G}_{(1)} \ \underline{G}_{(2)} \ \underline{G}_{(0)})^T$                                            | $\bullet(\underline{G}_\alpha \ \underline{G}_\beta \ \underline{G}_0)^T$                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{pmatrix} =$             | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                    | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_{(1)} \\ \underline{G}_{(2)} \\ \underline{G}_{(0)} \end{pmatrix} =$ | $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                    | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                     | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                             |
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_\alpha \\ \underline{G}_\beta \\ \underline{G}_0 \end{pmatrix} =$    | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                    | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                          |

**Table 6 – Transformation matrices in the power-invariant form for phasor quantities**

|                                                                                                     | $\bullet(\underline{G}_1 \ \underline{G}_2 \ \underline{G}_3)^T$                                                                                                                                   | $\bullet(\underline{G}_{(1)} \ \underline{G}_{(2)} \ \underline{G}_{(0)})^T$                                                               | $\bullet(\underline{G}_\alpha \ \underline{G}_\beta \ \underline{G}_0)^T$                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{pmatrix} =$             | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_{(1)} \\ \underline{G}_{(2)} \\ \underline{G}_{(0)} \end{pmatrix} =$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                         | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                        | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                                                                     |
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_\alpha \\ \underline{G}_\beta \\ \underline{G}_0 \end{pmatrix} =$    | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                             | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                |

## 5 Decoupling in three-phase a.c. systems

### 5.1 Decoupling in case of steady-state operation with sinusoidal quantities

Figure 1 gives the example of a three-phase a.c. system with inductive coupling between three line conductors L1, L2, L3 or three phase elements of a three-phase motor or generator with the neutral point earthed via an impedance  $\underline{Z}_N$ .

NOTE Subscripts L1, L2, L3 are introduced for the line-to-neutral voltages at the locations Q or N and for the line currents (see 3.2).

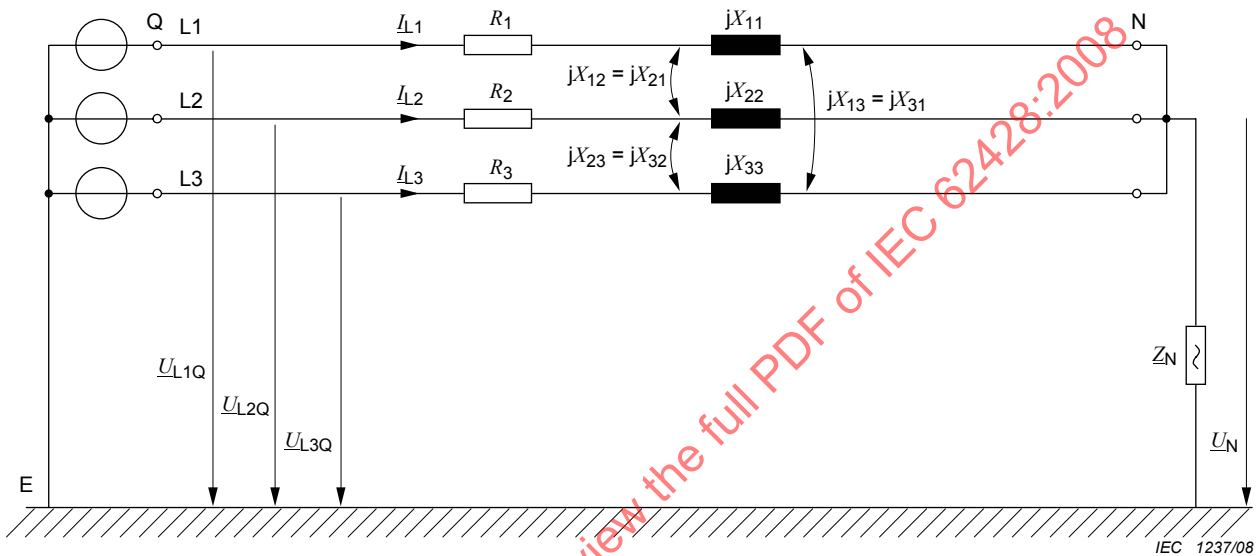


**Figure 1 – Circuit, fed by a three-phase voltage source with  $\underline{U}_{L1Q}$ ,  $\underline{U}_{L2Q}$ ,  $\underline{U}_{L3Q}$  at the connection point Q and earthed at the neutral point N via the impedance  $\underline{Z}_N = R_N + jX_N$**

From Figure 1 follows:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{L1Q} \\ \underline{U}_{L2Q} \\ \underline{U}_{L3Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{L1L1} & \underline{Z}_{L1L2} & \underline{Z}_{L1L3} \\ \underline{Z}_{L2L1} & \underline{Z}_{L2L2} & \underline{Z}_{L2L3} \\ \underline{Z}_{L3L1} & \underline{Z}_{L3L2} & \underline{Z}_{L3L3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}_N \\ \underline{U}_N \\ \underline{U}_N \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\underline{U}_{LQ} = \underline{Z}_L \underline{I}_L + \underline{U}_N \quad (17)$$

If the original quantities of Equation (17) are substituted by the modal components using Equation (2), the following equation is found:

$$\underline{T} \underline{U}_{MQ} = \underline{Z}_L \underline{T} \underline{I}_M + \underline{T} \underline{U}_{MN} \quad (18)$$

Equation (18) multiplied with  $\underline{T}^{-1}$  leads to Equation (19), because  $\underline{T}^{-1} \underline{T} = \underline{E}$ :

$$\underline{U}_{MQ} = \underline{T}^{-1} \underline{Z}_L \underline{T} \underline{I}_M + \underline{U}_{MN} = \underline{Z}_M \underline{I}_M + \underline{U}_{MN} \quad (19)$$

The following modal components are therefore defined:

Modal impedance matrix

$$\underline{Z}_M = \underline{T}^{-1} \underline{Z}_L \underline{T} \quad (20)$$

Modal voltage vector in Q

$$\underline{U}_{MQ} = \underline{T}^{-1} \underline{U}_{LQ} \quad (21)$$

Modal current vector

$$\underline{I}_M = \underline{T}^{-1} \underline{I}_L \quad (22)$$

Modal voltage vector in N

$$\underline{U}_{MN} = \underline{T}^{-1} \underline{U}_N \quad (23)$$

If  $\underline{Z}_N$  is finite, the following equation is obtained from Figure 1:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_N \\ \underline{U}_N \\ \underline{U}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_N & \underline{Z}_N & \underline{Z}_N \\ \underline{Z}_N & \underline{Z}_N & \underline{Z}_N \\ \underline{Z}_N & \underline{Z}_N & \underline{Z}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\underline{U}_N = \underline{Z}_N \underline{I}_L \quad (25)$$

Then Equation (23) is changed to:

$$\underline{U}_{MN} = \underline{T}^{-1} \underline{Z}_N \underline{T} \underline{I}_M = \underline{Z}_{MN} \underline{I}_M \quad (26)$$

Table 7 gives the modal voltages and the modal impedances for the symmetrical components and the  $\alpha\beta 0$  components in the power-variant (reference-conductor-invariant) and the power-invariant form in case of phasor quantities under the following conditions:

- Symmetrical system with:  
 $\underline{U}_{L2Q} = \underline{a}^2 \underline{U}_{L1Q}$ ,  $\underline{U}_{L3Q} = \underline{a} \underline{U}_{L1Q}$ , from which results:  $\underline{U}_{L1Q} + \underline{U}_{L2Q} + \underline{U}_{L3Q} = 0$
- Impedance matrix cyclic and symmetric:  
 $\underline{Z}_{L1L1} = \underline{Z}_{L2L2} = \underline{Z}_{L3L3} = \underline{Z}_A$ ,  
 $\underline{Z}_{L1L2} = \underline{Z}_{L2L1} = \underline{Z}_{L1L3} = \underline{Z}_{L3L1} = \underline{Z}_{L2L3} = \underline{Z}_{L3L2} = \underline{Z}_B$
- Impedance matrix only cyclic:  
 $\underline{Z}_{L1L1} = \underline{Z}_{L2L2} = \underline{Z}_{L3L3} = \underline{Z}_A$ ,  
 $\underline{Z}_{L1L2} = \underline{Z}_{L2L3} = \underline{Z}_{L3L1} = \underline{Z}_B$ ,  
 $\underline{Z}_{L1L3} = \underline{Z}_{L2L1} = \underline{Z}_{L3L2} = \underline{Z}_C$

From Table 7 it can be seen, that decoupling is possible if the impedance matrix  $\underline{Z}_L$  has diagonal cyclic symmetry or, if the symmetrical components are used, also in that case if the

impedance matrix  $\underline{Z}_L$  has only cyclic symmetry. Figure 2 demonstrates this result. A voltage source does not exist in the zero-sequence system.

**Table 7 – Modal voltages and impedances in case of phasor quantities**

| Modal components                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Power-variant form                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                   | Power-invariant form                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | (1) (2) (0)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\alpha\beta 0$                                                                   | (1) (2) (0)                                                                                                                                                                                                                                        | $\alpha\beta 0$                                                                                      |
| symmetrical system of source voltages<br>$\underline{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{U}_{L1Q} \\ \underline{U}_{L2Q} \\ \underline{U}_{L3Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_{M1Q} \\ \underline{U}_{M2Q} \\ \underline{U}_{M3Q} \end{pmatrix}$<br>a                                                                                                                                                                               | $\begin{pmatrix} \underline{U}_{L1Q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\begin{pmatrix} \underline{U}_{L1Q} \\ -j\underline{U}_{L1Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\sqrt{3} \begin{pmatrix} \underline{U}_{L1Q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                             | $\sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \underline{U}_{L1Q} \\ -j\underline{U}_{L1Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| $\underline{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{U}_N \\ \underline{U}_N \\ \underline{U}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_{M1N} \\ \underline{U}_{M2N} \\ \underline{U}_{M3N} \end{pmatrix} =$<br>b                                                                                                                                                                                                                                  | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{U}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\underline{Z}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{M1} \\ \underline{I}_{M2} \\ \underline{I}_{M3} \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                   | $\sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{U}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\underline{Z}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{M1} \\ \underline{I}_{M2} \\ \underline{I}_{M3} \end{pmatrix}$ |                                                                                                      |
| $\underline{T}^{-1} \underline{Z}_L \underline{T} = \underline{Z}_M \text{ with}$<br>$\underline{Z}_L = \begin{pmatrix} \underline{Z}_A & \underline{Z}_B & \underline{Z}_B \\ \underline{Z}_B & \underline{Z}_A & \underline{Z}_B \\ \underline{Z}_B & \underline{Z}_B & \underline{Z}_A \end{pmatrix}$<br>c                                                                                                                                      | Independent of the given modal components<br>$\underline{Z}_M = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{M1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{M2} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_A - \underline{Z}_B & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_A - \underline{Z}_B & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_A + 2\underline{Z}_B \end{pmatrix}$                                                                                                                         |                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                      |
| $\underline{T}^{-1} \underline{Z}_L \underline{T} = \underline{Z}_M \text{ with}$<br>$\underline{Z}_L = \begin{pmatrix} \underline{Z}_A & \underline{Z}_B & \underline{Z}_C \\ \underline{Z}_C & \underline{Z}_A & \underline{Z}_B \\ \underline{Z}_B & \underline{Z}_C & \underline{Z}_A \end{pmatrix}$<br>d                                                                                                                                      | only for symmetrical components (1) (2) (0)<br>$\underline{Z}_M = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{M1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{M2} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{M3} \end{pmatrix}$<br>$= \begin{pmatrix} \underline{Z}_A + \underline{a}^2 \underline{Z}_B + \underline{a} \underline{Z}_C & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_A + \underline{a} \underline{Z}_B + \underline{a}^2 \underline{Z}_C & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C \end{pmatrix}$ |                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                      |
| a $\underline{U}_{L2Q} = \underline{a}^2 \underline{U}_{L1Q}$ , $\underline{U}_{L3Q} = \underline{a} \underline{U}_{L1Q}$ , $\underline{U}_{L1Q} + \underline{U}_{L2Q} + \underline{U}_{L3Q} = 0$<br>b $\underline{U}_{L1N} = \underline{U}_{L2N} = \underline{U}_{L3N} = \underline{U}_N$ , see Figure 1.<br>c A: $L1L1 = L2L2 = L3L3$ , B: $L1L2 = L2L3 = L3L1$<br>d A: $L1L1 = L2L2 = L3L3$ , B: $L1L2 = L2L3 = L3L1$ , C: $L1L3 = L2L1 = L3L2$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                      |

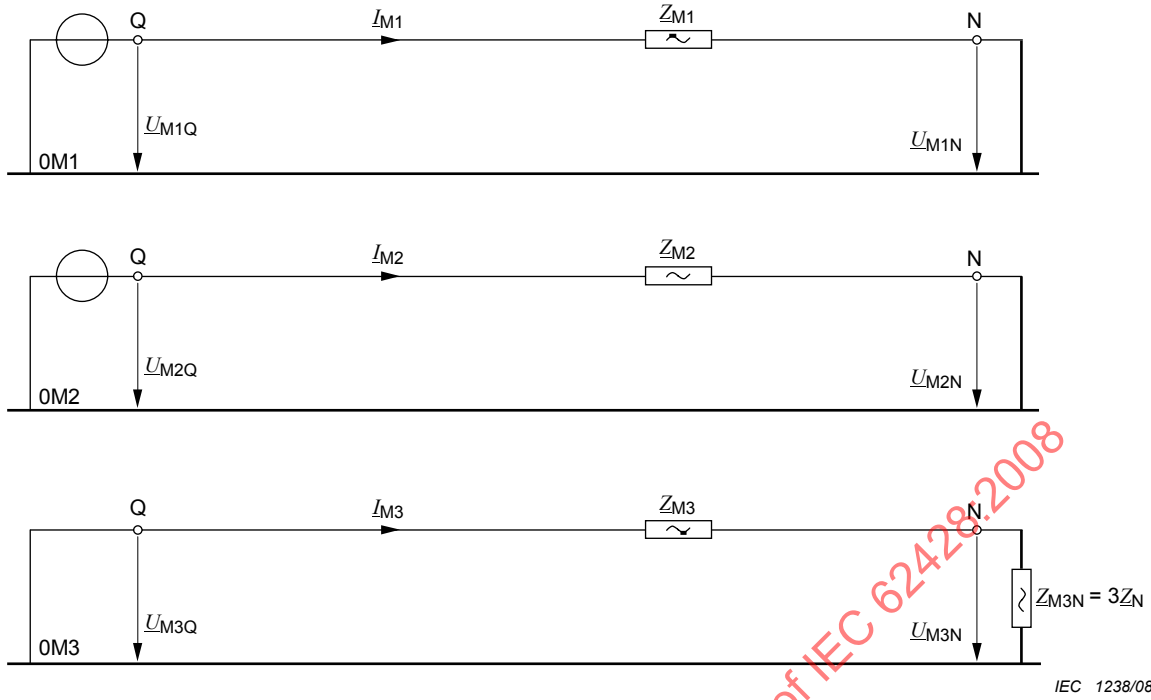


**Figure 2 – Three decoupled systems which replace the coupled three-phase a.c. system of Figure 1 under the described conditions (see text)**

Decoupling is also possible if an admittance matrix, for instance for the line-to-line and the line-to-earth capacitances, is given instead of the impedance matrix.

## 5.2 Decoupling under transient conditions

For the coupled three-phase a.c. system in Figure 1 the following differential equation can be found:

$$\begin{pmatrix} u_{L1Q} \\ u_{L2Q} \\ u_{L3Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_L & 0 & 0 \\ 0 & R_L & 0 \\ 0 & 0 & R_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \left[ \begin{pmatrix} L_{L1L1} & L_{L1L2} & L_{L1L3} \\ L_{L2L1} & L_{L2L2} & L_{L2L3} \\ L_{L3L1} & L_{L3L2} & L_{L3L3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} u_{L1N} \\ u_{L2N} \\ u_{L3N} \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$u_{LQ} = R_L i_L + \frac{d}{dt} (L_L i_L) + u_{LN} \quad (28)$$

If the original quantities of Equation (28) are substituted by the modal components using Equation (2), the following equation is obtained:

$$\underline{T} \underline{u}_{MQ} = \underline{R}_L \underline{T} \underline{i}_M + \frac{d}{dt} (\underline{L}_L \underline{T} \underline{i}_M) + \underline{T} \underline{u}_{MN} \quad (29)$$

Equation (29) multiplied from the left hand side with  $\underline{T}^{-1}$  leads to Equation (30), because  $\underline{T}^{-1} \underline{T} = \underline{E}$ .

$$\underline{u}_{MQ} = \underline{T}^{-1} \underline{R}_L \underline{T} \underline{i}_M + \frac{d}{dt} (\underline{T}^{-1} \underline{L}_L \underline{T} \underline{i}_M) + (\underline{T}^{-1} \frac{d}{dt} \underline{T}) \underline{T}^{-1} \underline{L}_L \underline{T} \underline{i}_M + \underline{u}_{MN} \quad (30)$$

Introducing the modal resistance matrix:

$$\underline{T}^{-1} \underline{R}_L \underline{T} = \underline{R}_M \quad (31)$$

and the modal inductance matrix:

$$\underline{T}^{-1} \underline{L}_L \underline{T} = \underline{L}_M, \quad (32)$$

Equation (30) leads to:

$$\underline{u}_{MQ} = \underline{R}_M \underline{i}_M + \frac{d}{dt} (\underline{L}_M \underline{i}_M) + (\underline{T}^{-1} \frac{d}{dt} \underline{T}) \underline{L}_M \underline{i}_M + \underline{u}_{MN} \quad (33)$$

The additional matrix term of Equation (33) in comparison to Equation (28) for the original quantities can be found in connection to Table 2 as follows:

- $\alpha\beta 0$  components and space-phaser transformation in a non-rotating frame:

$$\underline{T}^{-1} \frac{d}{dt} \underline{T} = \underline{0} \quad (34)$$

- dq0 quantities:

$$\underline{T}^{-1} \frac{d}{dt} \underline{T} = \frac{d\vartheta}{dt} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

- space phasor transformation in a rotating (angle-dependent) frame:

$$\underline{T}^{-1} \frac{d}{dt} \underline{T} = \frac{d\vartheta}{dt} \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

If the neutral point in Figure 1 is earthed through a resistance  $R_N$  and an inductance  $L_N$  in series, the voltage vector then can be expressed by:

$$\begin{pmatrix} u_{L1N} \\ u_{L2N} \\ u_{L3N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_N & R_N & R_N \\ R_N & R_N & R_N \\ R_N & R_N & R_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \left[ \begin{pmatrix} L_N & L_N & L_N \\ L_N & L_N & L_N \\ L_N & L_N & L_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{pmatrix} \right] \quad (37)$$

$$\underline{u}_{LN} = \underline{R}_N \underline{i}_L + \frac{d}{dt} (\underline{L}_L \underline{i}_L) \quad (38)$$

If the original quantities of Equation (38) are substituted by the modal components using Equation (2), the following equation is obtained:

$$\underline{T} \underline{u}_{MN} = \underline{R}_N \underline{T} \underline{i}_M + \frac{d}{dt} (\underline{L}_N \underline{T} \underline{i}_M) \quad (39)$$

Equation (39) multiplied from the left side with  $\underline{T}^{-1}$  leads to Equation (40), because  $\underline{T}^{-1} \underline{T} = \underline{E}$  :

$$\underline{u}_{MN} = \underline{T}^{-1} \underline{R}_N \underline{T} \underline{i}_M + \frac{d}{dt} (\underline{T}^{-1} \underline{L}_N \underline{T} \underline{i}_M) + (\underline{T}^{-1} \frac{d}{dt} \underline{T}) \underline{T}^{-1} \underline{L}_N \underline{T} \underline{i}_M \quad (40)$$

Introducing the modal resistance matrix:

$$\underline{T}^{-1} \underline{R}_N \underline{T} = \underline{R}_{MN} \quad (41)$$

and the modal inductance matrix

$$\underline{T}^{-1} \underline{L}_N \underline{T} = \underline{L}_{MN} \quad (42)$$

Equation (40) leads to:

$$\underline{u}_{MN} = \underline{R}_{MN} \underline{i}_M + \frac{d}{dt} (\underline{L}_{MN} \underline{i}_M) + (\underline{T}^{-1} \frac{d}{dt} \underline{T}) \underline{L}_{MN} \underline{i}_M \quad (43)$$

The additional matrix term of Equation (43) in comparison to Equation (38) for the original quantities can be found in connection to Table 2 as follows:

$$u_{\alpha N} = 0, \quad u_{dN} = 0, \quad u_{sN} = 0, \quad u_{rN} = 0,$$

$$u_{\beta N} = 0, \quad u_{qN} = 0, \quad u_{sN}^* = 0, \quad u_{rN}^* = 0,$$

$$u_{0N} = 3R_N i_0 + 3L_N \frac{d}{dt} i_0 \quad \text{with } R_{MN} = 3R_N \quad \text{and } L_{MN} = 3L_N$$

In the special case of steady-state operation where  $\underline{u}_{MQ} \rightarrow \underline{U}_{MQ}$ ,  $\underline{i}_M \rightarrow \underline{I}_M$ ,  $\frac{d}{dt} \underline{i}_M \rightarrow j\omega \underline{I}_M$ ,  $\underline{u}_{MN} \rightarrow \underline{U}_{MN}$  and if  $\underline{T}$  is time invariant, Equation (30) leads to Equation (19) and Equation (43) leads to Equation (26).

Table 8 gives the expressions for modal voltages and inductances for  $\alpha\beta 0$  components, dq0 components, and space phasor components under transient conditions.

Table 8 – Modal voltages and inductances under transient conditions

| Modal components                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Power-variant form: $F = 1$ and $R = 1$ , Power-invariant form: $F = \sqrt{\frac{3}{2}}$ and $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |                                                                                                                        |                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\alpha\beta 0$                                                                                                       | $ss^*0$                                                                                                                | $dq0$                                                                                                                                                               | $rr^*0$                                                                                                                                                                |
| $\underline{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{u}_{L1Q} \\ \underline{u}_{L2Q} \\ \underline{u}_{L3Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u}_{M1Q} \\ \underline{u}_{M2Q} \\ \underline{u}_{M3Q} \end{pmatrix} =$                                                                             | $F \begin{pmatrix} \hat{u}_Q \cos(\omega t + \varphi_Q) \\ \hat{u}_Q \sin(\omega t + \varphi_Q) \\ 0 \end{pmatrix}$   | $R \begin{pmatrix} \hat{u}_Q e^{j(\omega t + \varphi_Q)} \\ \hat{u}_Q e^{-j(\omega t + \varphi_Q)} \\ 0 \end{pmatrix}$ | $F \begin{pmatrix} \hat{u}_Q \cos((\omega - \Omega)t + \varphi_Q - \vartheta_0) \\ \hat{u}_Q \sin((\omega - \Omega)t + \varphi_Q - \vartheta_0) \\ 0 \end{pmatrix}$ | $R \begin{pmatrix} \hat{u}_Q e^{j((\omega - \Omega)t + \varphi_Q - \vartheta_0)} \\ \hat{u}_Q e^{-j((\omega - \Omega)t + \varphi_Q - \vartheta_0)} \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| $\underline{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{u}_N \\ \underline{u}_N \\ \underline{u}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u}_{M1N} \\ \underline{u}_{M2N} \\ \underline{u}_{M3N} \end{pmatrix} =$                                                                                         | power-variant form: $D = 1$ , power-invariant form: $D = \sqrt{3}$                                                    |                                                                                                                        |                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                        |
| $\underline{T}^{-1} \underline{L}_L \underline{T} = \underline{L}_M \text{ with } \underline{L}_L = \begin{pmatrix} \underline{L}_A & \underline{L}_B & \underline{L}_B \\ \underline{L}_B & \underline{L}_A & \underline{L}_B \\ \underline{L}_B & \underline{L}_B & \underline{L}_A \end{pmatrix}$ | independent of the modal components:                                                                                  |                                                                                                                        |                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                        |
| $\underline{T}^{-1} \underline{L}_L \underline{T} = \underline{L}_M \text{ with } \underline{L}_L = \begin{pmatrix} \underline{L}_A & \underline{L}_B & \underline{L}_C \\ \underline{L}_C & \underline{L}_A & \underline{L}_B \\ \underline{L}_B & \underline{L}_C & \underline{L}_A \end{pmatrix}$ | only for $ss^*0$ and $rr^*0$ components :                                                                             |                                                                                                                        |                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                        |
| <sup>a</sup> $\underline{u}_{L1Q} = \hat{u}_Q \cos(\omega t + \varphi_Q)$ , $\underline{u}_{L2Q} = \hat{u}_Q \cos(\omega t + \varphi_Q - \frac{2\pi}{3})$ , $\underline{u}_{L3Q} = \hat{u}_Q \cos(\omega t + \varphi_Q + \frac{2\pi}{3})$                                                            | <sup>b</sup> $\underline{u}_{L1N} = \underline{u}_{L2N} = \underline{u}_{L3N} = \underline{u}_N$                      | <sup>c</sup> A: L1L1 = L2L2 = L3L3, B: L1L2 = L2L3 = L3L1                                                              | <sup>d</sup> A: L1L1 = L2L2 = L3L3, B: L1L2 = L2L3 = L3L1, C: L1L3 = L2L1 = L3L2                                                                                    |                                                                                                                                                                        |

## **Bibliography**

IEC 60865:1986, *Pre-recorded optical reflective videodisk system “Laser vision” 50 Hz/625 lines – PAL*

IEC 60909:2001, *Short-circuit currents in three-phase a.c. systems – Part 0: Calculation of currents*

IEC 61660 (all parts), *Short-circuit currents in d.c. auxiliary installations in power plants and substations*

---

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 62428:2008

## SOMMAIRE

|                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| AVANT-PROPOS.....                                                                                                                                                                                                                                            | 25 |
| 1 Domaine d'application .....                                                                                                                                                                                                                                | 27 |
| 2 Références normatives.....                                                                                                                                                                                                                                 | 27 |
| 3 Termes, définitions, grandeurs et concepts .....                                                                                                                                                                                                           | 27 |
| 3.1 Généralités.....                                                                                                                                                                                                                                         | 27 |
| 3.2 Termes et définitions .....                                                                                                                                                                                                                              | 27 |
| 4 Transformations modales .....                                                                                                                                                                                                                              | 29 |
| 4.1 Généralités.....                                                                                                                                                                                                                                         | 29 |
| 4.2 Puissance en composantes modales .....                                                                                                                                                                                                                   | 30 |
| 4.3 Transformations usuelles .....                                                                                                                                                                                                                           | 32 |
| 5 Découplage dans les systèmes a.c. triphasés.....                                                                                                                                                                                                           | 38 |
| 5.1 Découplage en régime permanent avec des grandeurs sinusoïdales .....                                                                                                                                                                                     | 38 |
| 5.2 Découplage en régime transitoire .....                                                                                                                                                                                                                   | 41 |
| Bibliographie.....                                                                                                                                                                                                                                           | 45 |
| Figure 1 – Circuit alimenté par une source triphasée de tension $\underline{U}_{L1Q}$ , $\underline{U}_{L2Q}$ , $\underline{U}_{L3Q}$ au point Q et mis à la terre au point neutre N par l'intermédiaire de l'impédance $\underline{Z}_N = R_N + jX_N$ ..... | 38 |
| Figure 2 – Remplacement du système a.c. triphasé couplé de la Figure 1 par trois systèmes découplés sous des conditions déterminées (voir texte) .....                                                                                                       | 41 |
| Tableau 1 – Composantes modales ne conservant pas la puissance et leurs matrices de transformation.....                                                                                                                                                      | 33 |
| Tableau 2 – Composantes modales conservant la puissance et leurs matrices de transformation.....                                                                                                                                                             | 34 |
| Tableau 3 – Composantes de Clarke, de Park et en phaseurs spatiaux – Matrices de transformation pour les composantes modales sous forme ne conservant pas la puissance .....                                                                                 | 35 |
| Tableau 4 – Composantes de Clarke, de Park et en phaseurs spatiaux – Matrices de transformation pour les composantes modales sous forme conservant la puissance .....                                                                                        | 36 |
| Tableau 5 – Matrices de transformation pour les phaseurs sous forme ne conservant pas la puissance.....                                                                                                                                                      | 37 |
| Tableau 6 – Matrices de transformation pour les phaseurs sous forme conservant la puissance .....                                                                                                                                                            | 37 |
| Tableau 7 – Tensions et impédances modales pour des phaseurs .....                                                                                                                                                                                           | 40 |
| Tableau 8 – Tensions et inductances modales en régime transitoire .....                                                                                                                                                                                      | 44 |

# COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

## ÉNERGIE ÉLECTRIQUE – COMPOSANTES MODALES DANS LES SYSTÈMES AC TRIPHASÉS – GRANDEURS ET TRANSFORMATIONS

### AVANT-PROPOS

- 1) La Commission Electrotechnique Internationale (CEI) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de la CEI). La CEI a pour objet de favoriser la coopération internationale pour toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. A cet effet, la CEI – entre autres activités – publie des Normes internationales, des Spécifications techniques, des Rapports techniques, des Spécifications accessibles au public (PAS) et des Guides (ci-après dénommés "Publication(s) de la CEI"). Leur élaboration est confiée à des comités d'études, aux travaux desquels tout Comité national intéressé par le sujet traité peut participer. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec la CEI, participent également aux travaux. La CEI collabore étroitement avec l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO), selon des conditions fixées par accord entre les deux organisations.
- 2) Les décisions ou accords officiels de la CEI concernant les questions techniques représentent, dans la mesure du possible, un accord international sur les sujets étudiés, étant donné que les Comités nationaux de la CEI intéressés sont représentés dans chaque comité d'études.
- 3) Les Publications de la CEI se présentent sous la forme de recommandations internationales et sont agréées comme telles par les Comités nationaux de la CEI. Tous les efforts raisonnables sont entrepris afin que la CEI s'assure de l'exactitude du contenu technique de ses publications; la CEI ne peut pas être tenue responsable de l'éventuelle mauvaise utilisation ou interprétation qui en est faite par un quelconque utilisateur final.
- 4) Dans le but d'encourager l'uniformité internationale, les Comités nationaux de la CEI s'engagent, dans toute la mesure possible, à appliquer de façon transparente les Publications de la CEI dans leurs publications nationales et régionales. Toutes divergences entre toutes Publications de la CEI et toutes publications nationales ou régionales correspondantes doivent être indiquées en termes clairs dans ces dernières.
- 5) La CEI n'a prévu aucune procédure de marquage valant indication d'approbation et n'engage pas sa responsabilité pour les équipements déclarés conformes à une de ses Publications.
- 6) Tous les utilisateurs doivent s'assurer qu'ils sont en possession de la dernière édition de cette publication.
- 7) Aucune responsabilité ne doit être imputée à la CEI, à ses administrateurs, employés, auxiliaires ou mandataires, y compris ses experts particuliers et les membres de ses comités d'études et des Comités nationaux de la CEI, pour tout préjudice causé en cas de dommages corporels et matériels, ou de tout autre dommage de quelque nature que ce soit, directe ou indirecte, ou pour supporter les coûts (y compris les frais de justice) et les dépenses découlant de la publication ou de l'utilisation de cette Publication de la CEI ou de toute autre Publication de la CEI, ou au crédit qui lui est accordé.
- 8) L'attention est attirée sur les références normatives citées dans cette publication. L'utilisation de publications référencées est obligatoire pour une application correcte de la présente publication.
- 9) L'attention est attirée sur le fait que certains des éléments de la présente Publication de la CEI peuvent faire l'objet de droits de propriété intellectuelle ou de droits analogues. La CEI ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de propriété et de ne pas avoir signalé leur existence.

La Norme internationale CEI 62428 a été établie par le comité d'études 25 de la CEI: Grandeurs et unités.

Le texte de cette norme est issu des documents suivants:

| FDIS        | Rapport de vote |
|-------------|-----------------|
| 25/382/FDIS | 25/390/RVD      |

Le rapport de vote indiqué dans le tableau ci-dessus donne toute information sur le vote ayant abouti à l'approbation de cette norme.

Cette publication a été rédigée selon les Directives ISO/CEI, Partie 2.

Le comité a décidé que le contenu de cette publication ne sera pas modifié avant la date de maintenance indiquée sur le site web de la CEI sous «<http://webstore.iec.ch>» dans les données relatives à la publication recherchée. A cette date, la publication sera

- reconduite;
- supprimée;
- remplacée par une édition révisée; ou
- amendée.

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 62428:2008

# ÉNERGIE ÉLECTRIQUE – COMPOSANTES MODALES DANS LES SYSTÈMES AC TRIPHASÉS – GRANDEURS ET TRANSFORMATIONS

## 1 Domaine d'application

La présente norme traite des transformations des grandeurs originales en grandeurs modales pour les systèmes a.c. triphasés qui sont largement utilisés dans le domaine de l'énergie électrique.

L'étude des conditions de fonctionnement et des régimes transitoires dans les systèmes a.c. triphasés est rendue difficile du fait des couplages résistifs, inductifs ou capacitifs entre les éléments de phase et entre les conducteurs de ligne. Le calcul et la description de ces phénomènes dans les systèmes a.c. triphasés est plus facile si les grandeurs concernant les éléments de phase et les conducteurs de ligne sont transformées en grandeurs modales. Le calcul devient très facile si la transformation conduit à des systèmes modaux découplés. Les matrices d'impédances et d'admittances originales sont transformées en matrices d'impédances et d'admittances modales. Dans le cas où les grandeurs modales sont découplées, les matrices d'impédances et d'admittances deviennent diagonales.

## 2 Références normatives

Les documents de référence suivants sont indispensables pour l'application du présent document. Pour les références datées, seule l'édition citée s'applique. Pour les références non datées, la dernière édition du document de référence s'applique (y compris les éventuels amendements).

CEI 60050-141, *Vocabulaire Électrotechnique International (VEI) – Partie 141: Systèmes et circuits polyphasés*

## 3 Termes, définitions, grandeurs et concepts

### 3.1 Généralités

Dans la présente norme, les grandeurs dépendent usuellement du temps. Ces grandeurs sont par exemple des courants électriques, des tensions, des flux totalisés, des courants totalisés (ou solénations), des flux électriques et magnétiques.

On utilise le symbole littéral général  $g$  pour les valeurs instantanées réelles,  $\underline{g}$  pour les valeurs instantanées complexes et  $\underline{\underline{G}}$  pour les phaseurs (valeurs efficaces complexes).

NOTE Dans cette norme, les grandeurs complexes sont soulignées. Les grandeurs complexes conjuguées sont indiquées par un astérisque (\*). Les matrices et les vecteurs colonnes sont imprimés en caractères gras italiques.

### 3.2 Termes et définitions

Pour les besoins du présent document, les termes et définitions donnés dans la CEI 60050-141, ainsi que les suivants s'appliquent.

### 3.2.1

#### grandeurs originales

grandeurs  $\underline{g}$  ou  $\underline{G}$  d'un système a.c. triphasé

NOTE Les indices 1, 2, 3 sont utilisés dans la présente norme; des lettres supplémentaires peuvent être ajoutées, par exemple L1, L2, L3 comme dans les CEI 60909, CEI 60865 et CEI 61660.

### 3.2.2

#### composantes modales

grandeurs  $\underline{g}_M$ ,  $\underline{g}_M$  ou  $\underline{G}_M$  résultant de la transformation des grandeurs originales selon l'Article 3

NOTE Des indices supplémentaires 1, 2, 3 sont utilisés.

### 3.2.3

#### vecteur colonne de grandeurs

matrice colonne contenant les trois grandeurs originales ou les trois composantes modales d'un système a.c. triphasé

NOTE Les vecteurs colonnes sont désignés par  $\underline{g}$  ou  $\underline{g}_M$ , respectivement par  $\underline{G}$  ou  $\underline{G}_M$ .

### 3.2.4

#### transformation modale

équation matricielle  $\underline{T} \underline{g}_M = \underline{g}$  pour un vecteur colonne  $\underline{g}_M$  contenant les trois grandeurs modales inconnues, où  $\underline{g}$  est un vecteur colonne contenant les trois grandeurs originales données et  $\underline{T}$  est une matrice de transformation  $3 \times 3$

NOTE La transformation peut conserver ou non la puissance, voir Tableaux 1 et 2.

### 3.2.5

#### transformation modale inverse

solution  $\underline{g}_M = \underline{T}^{-1} \underline{g}$  de la transformation modale qui exprime un vecteur colonne  $\underline{g}_M$  contenant les trois quantités modales comme le produit matriciel de la matrice de transformation inverse  $\underline{T}^{-1}$  par un vecteur colonne  $\underline{g}$  contenant les trois grandeurs originales

### 3.2.6

#### transformation en composantes symétriques

##### transformation de Fortescue

transformation modale linéaire à coefficients complexes constants, dont la solution convertit les trois phaseurs originaux d'un système a.c. triphasé en les phaseurs de référence de trois systèmes a.c. triphasés symétriques — appelés composantes symétriques —, le premier des ces systèmes étant direct, le deuxième inverse et le troisième homopolaire

NOTE 1 La transformation en composantes symétriques est utilisée par exemple pour décrire des systèmes a.c. triphasés en régime permanent non symétrique.

NOTE 2 Voir Tableaux 1 et 2.

### 3.2.7

#### transformation en composantes de phaseurs spatiaux

transformation modale linéaire à coefficients constants ou dépendant d'un angle, dont la solution convertit les grandeurs originales instantanées d'un système a.c. triphasé en un phaseur spatial complexe dans un repère de référence tournant ou immobile, son conjugué complexe et une composante homopolaire réelle

NOTE 1 Le terme « vecteur spatial » est également utilisé à la place de « phaseur spatial ».

NOTE 2 La transformation en phaseur spatial est utilisée par exemple pour décrire des régimes transitoires dans des systèmes ou des machines a.c. triphasées.

NOTE 3 Voir Tableaux 1 et 2.

### 3.2.8

#### transformation en composantes $\alpha\beta 0$

##### transformation de Clarke

transformation modale linéaire à coefficients réels constants, dont la solution remplace les grandeurs instantanées originales d'un système a.c. triphasé par les parties réelle et imaginaire d'un phaseur spatial complexe dans un repère de référence immobile et une composante homopolaire réelle, ou qui remplace les trois phaseurs originaux d'un système a.c. triphasé par deux phaseurs (phaseurs  $\alpha$  et  $\beta$ ) et un phaseur homopolaire

NOTE 1 La forme du phaseur spatial qui ne conserve pas la puissance est donnée par  $\underline{g}_s = g_\alpha + j g_\beta$  et la

forme conservant la puissance par  $\underline{g}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_\alpha + j g_\beta)$ .

NOTE 2 La transformation  $\alpha\beta 0$  est utilisée par exemple pour décrire des régimes transitoires asymétriques dans des systèmes a.c. triphasés.

NOTE 3 Voir Tableaux 1 et 2.

### 3.2.9

#### transformation en composantes dq0

##### transformation de Park

transformation modale linéaire dont les coefficients dépendent des fonctions sinusoïdales d'un angle de rotation, dont la solution remplace les grandeurs instantanées originales d'un système a.c. triphasé par les parties réelle et imaginaire d'un phaseur spatial complexe dans un repère de référence tournant et une composante homopolaire réelle

NOTE 1 La forme du phaseur spatial qui ne conserve pas la puissance est donnée par  $\underline{g}_r = g_d + j g_q$  et la

forme qui conserve la puissance par  $\underline{g}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_d + j g_q)$ .

NOTE 2 La transformation dq0 est utilisée par exemple pour décrire des régimes transitoires dans les machines synchrones.

NOTE 3 Voir Tableaux 1 et 2.

## 4 Transformations modales

### 4.1 Généralités

Les grandeurs originales  $g_1, g_2, g_3$  et les composantes modales  $\underline{g}_{M1}, \underline{g}_{M2}, \underline{g}_{M3}$  sont liées par les formules de transformation suivantes:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{g}_{M1} \\ \underline{g}_{M2} \\ \underline{g}_{M3} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ou en abrégé:

$$\underline{g} = \underline{T} \underline{g}_M \quad (2)$$

Les coefficients  $t_{ik}$  de la matrice de transformation  $\underline{T}$  peuvent être tous réels ou certains d'entre eux peuvent être complexes. La matrice de transformation  $\underline{T}$  doit être régulière, pour que la transformation inverse de l'Equation (2) soit valable.

$$\underline{g}_M = \underline{T}^{-1} \underline{g} \quad (3)$$

Si les grandeurs originales sont des grandeurs sinusoïdales et de même fréquence, il est possible de les représenter par des phaseurs et d'écrire, de manière analogue, les formules de transformation (2) et (3) avec des coefficients constants:

$$\begin{pmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{G}_{M1} \\ \underline{G}_{M2} \\ \underline{G}_{M3} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{G} = \underline{T} \underline{G}_M \quad (5)$$

$$\underline{G}_M = \underline{T}^{-1} \underline{G} \quad (6)$$

#### 4.2 Puissance en composantes modales

Les formules de transformation sont utilisées soit sous forme ne conservant pas la puissance comme dans le Tableau 1 ou sous forme la conservant comme dans le Tableau 2.

Dans la forme de la transformation conservant la puissance, la puissance calculée à partir des trois composantes modales est égale à la puissance calculée à partir des grandeurs originales dans un système a.c. triphasé avec trois conducteurs de ligne et un conducteur neutre, où  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont les tensions étoilées, et  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  les courants de ligne en un point donné du réseau. Dans un système a.c. triphasé sans neutre relié,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont les tensions entre les conducteurs de ligne et un neutre virtuel en un point donné du réseau.

A partir des grandeurs originales, la puissance instantanée  $p$  peut être exprimée par:

$$p = u_1 i_1^* + u_2 i_2^* + u_3 i_3^* = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1^* \\ i_2^* \\ i_3^* \end{pmatrix} = \underline{u}^T \underline{i}^* \quad (7)$$

NOTE Les astérisques indiquent formellement les conjugués complexes des courants  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ . Si ceux-ci sont réels,  $i_1^*$ ,  $i_2^*$ ,  $i_3^*$  sont identiques à  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ .

Si l'Equation (2) liant les grandeurs originales aux composantes modales est appliquée pour les tensions et pour les courants:

$$\underline{u} = \underline{T} \underline{u}_M \text{ et } \underline{i} = \underline{T} \underline{i}_M \quad (8)$$

et prenant en compte le fait que

$$\underline{u}^T = (\underline{T} \underline{u}_M)^T = \underline{u}_M^T \underline{T}^T, \quad (9)$$

la puissance  $p$  peut être exprimée en fonction des composantes modales de la façon suivante:

$$p = \underline{u}_M^T \underline{T}^T \underline{T}^* \underline{i}_M^* \quad (10)$$

Dans le cas ne conservant pas la puissance, où  $\underline{T}^T \underline{T}^*$  n'est pas égal à la matrice unité, un exemple est donné à la fin de cette section. Dans le cas où

$$\underline{T}^T \underline{T}^* = E \quad (11)$$

où  $E$  est la matrice unité d'ordre trois, l'Equation (10) devient

$$p = \underline{u}_M^T \underline{i}_M^* = \begin{pmatrix} \underline{u}_{M1} & \underline{u}_{M2} & \underline{u}_{M3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{i}_{M1}^* \\ \underline{i}_{M2}^* \\ \underline{i}_{M3}^* \end{pmatrix} = \underline{u}_{M1} \underline{i}_{M1}^* + \underline{u}_{M2} \underline{i}_{M2}^* + \underline{u}_{M3} \underline{i}_{M3}^* \quad (12)$$

La condition  $\underline{T}^T \underline{T}^* = E$  ou  $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^*$  exprime que la matrice de transformation  $\underline{T}$  est unitaire.

Du fait de la structure identique des Equations (7) et (12), la transformation définie par une matrice unitaire est appelée forme invariante en puissance de la transformation.

En relation avec le Tableau 2, on peut donner les exemples suivants:

$$p_{\alpha\beta 0} = u_{\alpha} i_{\alpha} + u_{\beta} i_{\beta} + u_0 i_0$$

$$p_{dq0} = u_d i_d + u_q i_q + u_0 i_0$$

$$p_{ss^*0} = \underline{u}_s \underline{i}_s^* + \underline{u}_s^* \underline{i}_s + u_0 i_0 = 2\text{Re}\{\underline{u}_s \underline{i}_s^*\} + u_0 i_0$$

$$p_{rr^*0} = \underline{u}_r \underline{i}_r^* + \underline{u}_r^* \underline{i}_r + u_0 i_0 = 2\text{Re}\{\underline{u}_r \underline{i}_r^*\} + u_0 i_0$$

Dans le cas de systèmes triphasés de tensions et de courants, la puissance complexe est exprimée en fonction des phaseurs des grandeurs originales:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{i}_1^* + \underline{U}_2 \underline{i}_2^* + \underline{U}_3 \underline{i}_3^* = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 & \underline{U}_2 & \underline{U}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{i}_1^* \\ \underline{i}_2^* \\ \underline{i}_3^* \end{pmatrix} = \underline{U}^T \underline{I}^* \quad (13)$$

En remplaçant les composantes modales par

$$\underline{U}^T = (\underline{T} \underline{U}_M)^T = \underline{U}_M^T \underline{T}^T \text{ et } \underline{I}^* = \underline{T}^* \underline{I}_M^*$$

la puissance apparente complexe devient:

$$\underline{S} = \underline{U}_M^T \underline{T}^T \underline{T}^* \underline{I}_M^* \quad (14)$$

Dans le cas invariant en puissance, la condition  $\underline{T}^T \underline{T}^* = E$  doit aussi être satisfaite. L'Equation (14) conduit donc à l'expression en puissance invariante suivante:

$$\underline{S} = \underline{U}_M^T \underline{I}_M^* = \underline{U}_{M1} \underline{I}_{M1}^* + \underline{U}_{M2} \underline{I}_{M2}^* + \underline{U}_{M3} \underline{I}_{M3}^* = \begin{pmatrix} \underline{U}_{M1} & \underline{U}_{M2} & \underline{U}_{M3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{M1}^* \\ \underline{I}_{M2}^* \\ \underline{I}_{M3}^* \end{pmatrix} \quad (15)$$

La forme des matrices de transformation qui ne conservent pas la puissance est donnée dans les Tableaux 3 et 5. Elles sont aussi dites invariantes pour la composante de référence parce que, dans le cas symétrique, la composante modale de référence (la première) est égale à la composante de référence des grandeurs originales ou à son phaseur, respectivement. Ceci ne s'applique pas aux transformations dans un référentiel tournant.

EXEMPLE Pour la forme de la matrice de transformation  $\underline{T}$  qui conserve la puissance (Tableau 2), on a :

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}^{T*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où  $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^{T*}$  ou  $\underline{T}^T \underline{T}^* = \underline{E}$ , ce qui satisfait la condition d'invariance de la puissance.

Pour la forme de la matrice de transformation  $\underline{T}$  qui ne conserve pas la puissance (Tableau 1), on a :

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}^T = \begin{pmatrix} 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}^{T*} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le Tableau 1,  $\underline{T}^{-1}$  est égal à  $\frac{1}{3} \underline{T}^{T*}$ , si bien que  $\underline{T}^T \underline{T}^* = 3 \cdot \underline{E}$ .

#### 4.3 Transformations usuelles

Les matrices de transformation  $\underline{T}$  les plus fréquemment utilisées et leurs inverses  $\underline{T}^{-1}$  sont données dans le Tableau 1 sous forme qui ne conserve pas la puissance (invariance de la composante de référence) et dans le Tableau 2 sous forme qui conserve la puissance (invariance de la puissance). Dans les deux cas, les mêmes indices sont utilisés pour les composantes modales dans les Tableaux 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6.

Les Tableaux 3 à 6 donnent les relations entre les divers types de composantes modales.

**Tableau 1 – Composantes modales ne conservant pas la puissance  
et leurs matrices de transformation**

| Composantes<br>modales                                                          | Composante:<br>Première<br>Deuxième<br>Troisième                                      | Indice:<br>M1<br>M2<br>M3 | $\underline{T}$<br>a                                                                                                                                                                                                              | $\underline{T}^{-1}$                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| composantes<br>symétriques<br>(composantes de<br>Fortescue)                     | séquence directe<br>séquence inverse<br>séquence<br>homopolaire                       | (1)<br>(2)<br>(0)<br>b    | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                           | $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                             |
| composantes $\alpha\beta 0$ ,<br>référentiel fixe<br>(composantes de<br>Clarke) | $\alpha$<br>$\beta$<br>séquence<br>homopolaire                                        | $\alpha$<br>$\beta$<br>0  | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                      | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                          |
| composantes dq0,<br>référentiel tournant<br>(composantes de<br>Park)            | axe longitudinal<br>axe transversal<br>séquence<br>homopolaire                        | d<br>q<br>0               | $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 1 \\ c_2 & -s_2 & 1 \\ c_3 & -s_3 & 1 \end{pmatrix}$<br>c                                                                                                                                           | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$<br>c                                                                                                                               |
| transformation en<br>phaseur spatial,<br>référentiel fixe                       | phaseur spatial<br>conjugué complexe<br>du phaseur spatial<br>séquence<br>homopolaire | s<br>s*<br>0              | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 2 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                               | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                               |
| transformation en<br>phaseur spatial,<br>référentiel tournant                   | phaseur spatial<br>conjugué complexe<br>du phaseur spatial<br>séquence<br>homopolaire | r<br>r*<br>0              | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 2 \\ \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & 2 \\ \underline{a} e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} & 2 \end{pmatrix}$<br>c | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} \\ e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{j\vartheta} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$<br>c |

<sup>a</sup> Toutes les matrices de transformation  $\underline{T}$  données ici satisfont les conditions:

$$\underline{t}_{11} + \underline{t}_{21} + \underline{t}_{31} = 0, \quad \underline{t}_{12} + \underline{t}_{22} + \underline{t}_{32} = 0, \quad \underline{t}_{13} = \underline{t}_{23} = \underline{t}_{33}.$$

<sup>b</sup> Les normes CEI 60909, 60865 et 61660 ont introduit les indices (1), (2), (0) pour les composantes symétriques ne conservant pas la puissance, pour éviter toute confusion si les indices 1, 2, 3 sont utilisés à la place de L1, L2, L3.

<sup>c</sup>  $c_1 = \cos \vartheta$ ,  $c_2 = \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3})$ ,  $c_3 = \cos(\vartheta + \frac{2\pi}{3})$ ,  $s_1 = \sin \vartheta$ ,  $s_2 = \sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3})$ ,  
 $s_3 = \sin(\vartheta + \frac{2\pi}{3})$ ,  $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ ,  $\underline{a}^2 = \underline{a}^*$ ,  $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$ .

Dans le cas des machines synchrones,  $\vartheta$  est donné par  $\vartheta = \int \Omega(t) dt$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire instantanée du rotor.

**Tableau 2 – Composantes modales conservant la puissance et leurs matrices de transformation**

| Composantes modales                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Composante:<br>Première<br>Deuxième<br>Troisième                                   | Indice:<br>M1<br>M2<br>M3 | $\underline{T}$<br>a                                                                                                                                                                                                                     | $\underline{T}^{-1}$                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| composantes symétriques<br>(composantes de Fortescue)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | séquence directe<br>séquence inverse<br>séquence homopolaire                       | (1)<br>(2)<br>(0)<br>b    | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               |
| composantes $\alpha\beta 0$ ,<br>référentiel fixe<br>(composantes de Clarke)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $\alpha$<br>$\beta$<br>séquence homopolaire                                        | $\alpha$<br>$\beta$<br>0  | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$                                       | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$                                       |
| composantes dq0,<br>référentiel tournant<br>(composantes de Park)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | axe longitudinal<br>axe transversal<br>séquence homopolaire                        | d<br>q<br>0               | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2 & -s_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_3 & -s_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$<br>c                                                                            | $\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$<br>c                                                                            |
| transformation en<br>phaseur spatial,<br>référentiel fixe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | phaseur spatial<br>conjugué complexe<br>du phaseur spatial<br>séquence homopolaire | s<br>s*<br>0              | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                               |
| transformation en<br>phaseur spatial,<br>référentiel tournant                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | phaseur spatial<br>conjugué complexe<br>du phaseur spatial<br>séquence homopolaire | r<br>r*<br>0              | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 1 \\ \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & 1 \\ \underline{a} e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} & 1 \end{pmatrix}$<br>c | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} \\ e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{j\vartheta} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$<br>c |
| <p>a Toutes les matrices de transformation <math>\underline{T}</math> données ici satisfont les conditions:<br/> <math>\underline{t}_{11} + \underline{t}_{21} + \underline{t}_{31} = 0</math>, <math>\underline{t}_{12} + \underline{t}_{22} + \underline{t}_{32} = 0</math>, <math>\underline{t}_{13} = \underline{t}_{23} = \underline{t}_{33}</math>.</p> <p>b Les normes CEI 60909, 60865 et 61660 ont introduit les indices (1), (2), (0) pour les composantes symétriques ne conservant pas la puissance, pour éviter toute confusion si les indices 1, 2, 3 sont utilisés à la place de L1, L2, L3.</p> <p>c <math>c_1 = \cos \vartheta</math>, <math>c_2 = \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3})</math>, <math>c_3 = \cos(\vartheta + \frac{2\pi}{3})</math>, <math>s_1 = \sin \vartheta</math>, <math>s_2 = \sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3})</math>,<br/> <math>s_3 = \sin(\vartheta + \frac{2\pi}{3})</math>, <math>\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}</math>, <math>\underline{a}^2 = \underline{a}^*</math>, <math>1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0</math>.</p> <p>Dans le cas des machines synchrones, <math>\vartheta</math> est donné par <math>\vartheta = \int \Omega(t) dt</math>, où <math>\Omega</math> est la vitesse angulaire instantanée du rotor.</p> |                                                                                    |                           |                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                          |

Les Tableaux 3 et 4 donnent les relations pour les composantes  $\alpha\beta 0$  et dq0 avec les composantes en vecteurs spatiaux sous forme ne conservant pas la puissance et la conservant.

**Tableau 3 – Composantes de Clarke, de Park et en phaseurs spatiaux –  
Matrices de transformation pour les composantes modales sous forme ne conservant pas la puissance**

|                                                              | $\bullet (g_1 \ g_2 \ g_3)^T$                                                                                                                                                                                                    | $\bullet (g_\alpha \ g_\beta \ g_0)^T$                                                                                         | $\bullet (g_d \ g_q \ g_0)^T$                                                                                                  | $\bullet (g_s \ g_s^* \ g_0)^T$                                                                                                            | $\bullet (g_r \ g_r^* \ g_0)^T$                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} =$          | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                              | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 1 \\ c_2 & -s_2 & 1 \\ c_3 & -s_3 & 1 \end{pmatrix}$                                             | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a^2 & a & 2 \\ \bar{a} & \bar{a}^2 & 2 \end{pmatrix}$                                            | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 2 \\ a^2 e^{j\vartheta} & a e^{-j\vartheta} & 2 \\ \bar{a} e^{j\vartheta} & \bar{a}^2 e^{-j\vartheta} & 2 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{pmatrix} =$ | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                           | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                            | $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                   | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                                           | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 0 \\ -j e^{j\vartheta} & j e^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                               |
| $\begin{pmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{pmatrix} =$          | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                                     | $\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                   | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                            | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & e^{j\vartheta} & 0 \\ -j e^{-j\vartheta} & j e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                                         |
| $\begin{pmatrix} g_s \\ g_s^* \\ g_0 \end{pmatrix} =$        | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                                    | $\begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                           | $\begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & j e^{j\vartheta} & 0 \\ e^{-j\vartheta} & -j e^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                        | $\begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                           |
| $\begin{pmatrix} g_r \\ g_r^* \\ g_0 \end{pmatrix} =$        | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & a & e^{-j\vartheta} & a^2 e^{j\vartheta} \\ e^{j\vartheta} & a^2 e^{j\vartheta} & \bar{a} & e^{j\vartheta} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & j e^{-j\vartheta} & 0 \\ e^{j\vartheta} & -j e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                           | $\begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                             | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                      |

$$c_1 = \cos \vartheta, \quad c_2 = \cos \left( \vartheta - \frac{2\pi}{3} \right), \quad c_3 = \cos \left( \vartheta + \frac{2\pi}{3} \right), \quad s_1 = \sin \vartheta, \quad s_2 = \sin \left( \vartheta - \frac{2\pi}{3} \right), \quad s_3 = \sin \left( \vartheta + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Dans le cas des machines synchrones,  $\vartheta$  est donné par  $\vartheta = \int \Omega(t) dt$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire instantanée du rotor.

Tableau 4 – Composantes de Clarke, de Park et en phaseurs spatiaux –  
Matrices de transformation pour les composantes modales sous forme conservant la puissance

|                                                                                                                                                                                                                         | $\bullet (g_1 \ g_2 \ g_3)^T$                                                                                                                                                                                                       | $\bullet (g_\alpha \ g_\beta \ g_0)^T$                                                                                                                                                             | $\bullet (g_d \ g_q \ g_0)^T$                                                                                                                                   | $\bullet (\underline{g}_s \ \underline{g}_s^* \ \underline{g}_0)^T$                                                                                    | $\bullet (\underline{g}_r \ \underline{g}_r^* \ \underline{g}_0)^T$                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} =$                                                                                                                                                                     | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                 | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2 & -s_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_3 & -s_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$             | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 1 \\ \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & 1 \\ \underline{a} e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{pmatrix} =$                                                                                                                                                            | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$                    | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                | $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                    | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                         | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & e^{-j\vartheta} & 0 \\ -je^{j\vartheta} & je^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                                              |
| $\begin{pmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{pmatrix} =$                                                                                                                                                                     | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$                                                                     | $\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                       | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                             | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & e^{j\vartheta} & 0 \\ -je^{-j\vartheta} & je^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                                                                                                      |
| $\begin{pmatrix} \underline{g}_s \\ \underline{g}_s^* \\ \underline{g}_0 \end{pmatrix} =$                                                                                                                               | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                          | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                                                                     | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & je^{j\vartheta} & 0 \\ e^{-j\vartheta} & -je^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$          | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                    | $\begin{pmatrix} e^{j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                      |
| $\begin{pmatrix} \underline{g}_r \\ \underline{g}_r^* \\ \underline{g}_0 \end{pmatrix} =$                                                                                                                               | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & \underline{a} e^{-j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{-j\vartheta} \\ e^{j\vartheta} & \underline{a}^2 e^{j\vartheta} & \underline{a} e^{j\vartheta} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & je^{-j\vartheta} & 0 \\ e^{j\vartheta} & -je^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                             | $\begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                  | $\begin{pmatrix} e^{-j\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                         | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                 |
| $c_1 = \cos \vartheta, \ c_2 = \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3}), \ c_3 = \cos(\vartheta + \frac{2\pi}{3}), \ s_1 = \sin \vartheta, \ s_2 = \sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3}), \ s_3 = \sin(\vartheta + \frac{2\pi}{3}).$ |                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                     |
| Dans le cas des machines synchrones, $\vartheta$ est donné par $\vartheta = \int \Omega(t) dt$ , où $\Omega$ est la vitesse angulaire instantanée du rotor.                                                             |                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                     |

Les Tableaux 5 et 6 donnent les relations entre les composantes modales, valables si les grandeurs originales sont sinusoïdales, de même fréquence, et peuvent être représentés par des phaseurs r.m.s.

**Tableau 5 – Matrices de transformation pour les phaseurs sous forme ne conservant pas la puissance**

|                                                                                                     | $\bullet(\underline{G}_1 \quad \underline{G}_2 \quad \underline{G}_3)^T$                                                                                               | $\bullet(\underline{G}_{(1)} \quad \underline{G}_{(2)} \quad \underline{G}_{(0)})^T$                                    | $\bullet(\underline{G}_\alpha \quad \underline{G}_\beta \quad \underline{G}_0)^T$                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{pmatrix} =$             | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                    | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_{(1)} \\ \underline{G}_{(2)} \\ \underline{G}_{(0)} \end{pmatrix} =$ | $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                    | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                     | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                             |
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_\alpha \\ \underline{G}_\beta \\ \underline{G}_0 \end{pmatrix} =$    | $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                    | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                          |

**Tableau 6 – Matrices de transformation pour les phaseurs sous forme conservant la puissance**

|                                                                                                     | $\bullet(\underline{G}_1 \quad \underline{G}_2 \quad \underline{G}_3)^T$                                                                                                                                  | $\bullet(\underline{G}_{(1)} \quad \underline{G}_{(2)} \quad \underline{G}_{(0)})^T$                                                       | $\bullet(\underline{G}_\alpha \quad \underline{G}_\beta \quad \underline{G}_0)^T$                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{pmatrix} =$             | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                       | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_{(1)} \\ \underline{G}_{(2)} \\ \underline{G}_{(0)} \end{pmatrix} =$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                        | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                                                                                            |
| $\begin{pmatrix} \underline{G}_\alpha \\ \underline{G}_\beta \\ \underline{G}_0 \end{pmatrix} =$    | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$                                             | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                       |

## 5 Découplage dans les systèmes a.c. triphasés

### 5.1 Découplage en régime permanent avec des grandeurs sinusoïdales

La Figure 1 montre un exemple d'un système a.c. triphasé avec un couplage inductif entre les trois conducteurs de ligne L1, L2, L3 ou les trois éléments de phase d'un moteur ou d'un générateur triphasé dont le point neutre est mis à la terre par l'intermédiaire d'une impédance  $\underline{Z}_N$ .

NOTE Les indices L1, L2, L3 désignent les tensions étoilées aux points Q ou N et les courants de ligne (voir 3.2).

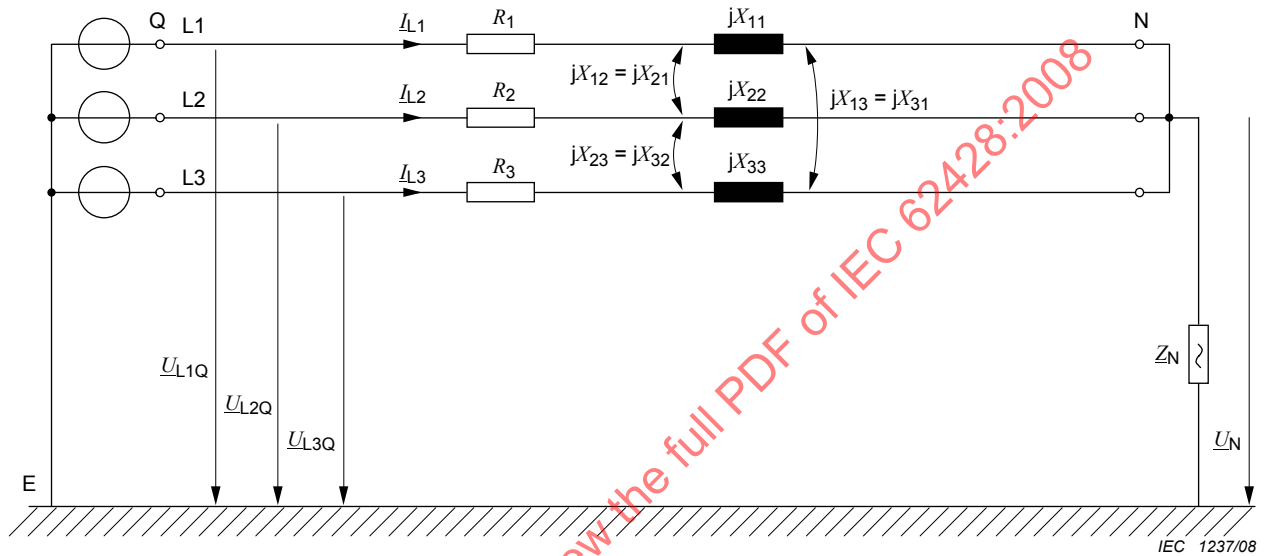


**Figure 1 – Circuit alimenté par une source triphasée de tension  $\underline{U}_{L1Q}$ ,  $\underline{U}_{L2Q}$ ,  $\underline{U}_{L3Q}$  au point Q et mis à la terre au point neutre N par l'intermédiaire de l'impédance  $\underline{Z}_N = R_N + jX_N$**

Il résulte de la Figure 1:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{L1Q} \\ \underline{U}_{L2Q} \\ \underline{U}_{L3Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{L1L1} & \underline{Z}_{L1L2} & \underline{Z}_{L1L3} \\ \underline{Z}_{L2L1} & \underline{Z}_{L2L2} & \underline{Z}_{L2L3} \\ \underline{Z}_{L3L1} & \underline{Z}_{L3L2} & \underline{Z}_{L3L3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}_N \\ \underline{U}_N \\ \underline{U}_N \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\underline{U}_{LQ} = \underline{Z}_L \underline{I}_L + \underline{U}_N \quad (17)$$

En remplaçant dans l'Equation (17) les grandeurs originales par les composantes modales à l'aide de l'Equation (2), on obtient:

$$\underline{T} \underline{U}_{MQ} = \underline{Z}_L \underline{T} \underline{I}_M + \underline{T} \underline{U}_{MN} \quad (18)$$

L'Equation (18) multipliée par  $\underline{T}^{-1}$  donne l'Equation (19), car  $\underline{T}^{-1} \underline{T} = \underline{E}$  :

$$\underline{U}_{MQ} = \underline{T}^{-1} \underline{Z}_L \underline{T} \underline{I}_M + \underline{U}_{MN} = \underline{Z}_M \underline{I}_M + \underline{U}_{MN} \quad (19)$$